Inlämningsuppgift 2, SF1677

Namn: ________________________________ **Personnummer:** ____________________

Email: ________________________________

Allmänt och Regler: Uppgiften är individuell, men du får diskutera den med andra studenter. I praktiken innebär detta ni får diskutera hur mycket som helst med varandra men att du skall sitta ensam när du skriver dina svar. Du får inte dela dina skrivna lösningar med någon. Uppgiften kommer att rättas med kriterierna, komplettering, "godkänt utan bonus" och "godkänt med bonus". Godkänt med bonus innebär att du automatiskt får full poäng på ett av tentans tal. Inlämningsuppgifterna kommer att bedömmas kvalitativt efter hur väl ni resonerar och inte individuellt poängsättas. **Alla svar skall bevisas!**

Sista inlämningsdag är: Onsdagen den 16e November Via mail (till johnan@kth.se)[1] eller på föreläsningen. Observera att datumet är lite senare vad som anges i föreläsningsplanen.

Uppgift 1: För en funktion $f(x)$ definierad i en omgivning av x så definierar vi

$$D^+f(x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

om gränsvärdet existerar.

1. Visa att $D^+f(x) = f'(x)$ om f är deriverbar i x.
2. Ge ett exempel på en funktion $f(x)$ så att $D^+f(x_0)$ existerar för något x_0 där f inte är deriverbar.
3. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$ och att $D^+f(x) \geq 0$ för alla $x \in [a,b]$. Bevisa att $f(a) \leq f(b)$.

Uppgift 2: Definiera

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{om } (0,1] \\ 0 & \text{om } x = 0, \end{cases}$$

där $\lfloor x \rfloor$ är heltalsdelen av x: mer precist $\lfloor x \rfloor = n$ om $x \in [n, n+1)$. Avgör om $f(x)$ är Riemann integrerbar på $[0,1]$.

Uppgift 3: Bevisa Dini's sats:

Sats 1. [DINI'S SATS] *Antag att $f_n(x) \in C^0(K)$ är en avtagande följd $f_1(x) \geq f_2(x) \geq f_3(x) \geq ...$ av kontinuerliga funktioner definierade på en kompakt mängd K. Visa att om $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ för alla $x \in K$ så kommer $f_n \to 0$ likformigt på K.*

Forts. nästa sida.

[1] Scannade lösningar eller datorskrivna, papper fotograferade med mobilkamera godtas inte!

Uppgift 4: En entusiastisk, men inte särskilt begåvad, student har lyckats bevisa följande sats:

Sats 2. *Alla kontinuerliga funktioner på $[a, b]$ är oändligt derivebara.*

Sats 2 gäller uppenbarligen inte! Men studenten har följande "bevis".

"Bevis" av Sats 2: Tag en godtycklig funktion $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. Enligt Weierstrass approximationssats (Sats 19, sidan 228 i Pugh) så finns det en följd av polynom $p_n(x)$ så att

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)| < \frac{1}{n}, \tag{1}$$

d.v.s. $p_n \to f$ likformigt.

Alla polynom är deriverbara (Corollary 2 på sidan 151 i Pugh). Eftersom derivator av polynom är polynom så följer det att vi kan derivera polynom godtyckligt många gånger. Vi kan sluta oss till att $p_n \in C^\infty([a, b])$. Detta tillsammans med (1) ger att

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [a,b]} \Big| f(x) - \underbrace{p_n(x)}_{\in C^\infty([a,b])} \Big| \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Det följer att f har avståndet 0 till en funktion i $C^\infty([a, b])$ så $f(x) =$ *"en funktion i $C^\infty([a, b])$"*. Så $f \in C^\infty([a, b])$. $\square$

Vad är fel i beviset? Kan man hitta exempel på en explicit kontinuerlig funktion där man kan se vad som går fel i beviset? Skriv en lite längre och utförlig förklaring/analys av vad som går fel med beviset. Känn dig fri att lägga upp din beskrivning hur du vill men försök vara tydlig.

Lycka Till!