KTH, Matematik
Maria Saprykina

Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 1)
24 oktober 2016 kl. 08:00-13:00

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–28 poäng, B–24, C–21, D–17, E–14, Fx–13.
Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina (masha@kth.se).
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen “Mathematics Handbook” av Råde och Westergren.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

1 a). Lös ekvationen **3p.**

$$3y^2y' + 16x = 2xy^3.$$

b). Finn en lösning som är begränsad på intervallet $x \in (0, \infty)$. **1p.**

2. Klassificiera med avseende på typ och stabilitet/instabilitet de kritiska punkterna till systemet

$$\begin{cases} x' = x + xy \\ y' = 4y - 2xy. \end{cases}$$

Här $x = x(t)$, $y = y(t)$.

3. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = -x^2, \quad x > 0,$$

givet att en lösning till motsvarande homogena ekvation är $y(x) = x^2$.

4. Funktionerna $y_1 = 1 + x$, $y_2 = 1 + 2x$ och $y_3 = 1 + e^x$, är lösningar till den inhomogena ekvationen

$$(x - 1)y'' - xy' + y = f(x), \quad x > 1.$$

a). Bestäm allmänna lösningen till den homogena ekvationen

$$(x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1.$$

Motivera väl! **3p.**

b). Lös den inhomogena ekvationen ovan med begynnelsevärden $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. **1p.**

Vänd!

5. Låt

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ t, & t \geq 1. \end{cases}$$

a). Bestäm Laplace-transformen $F(s)$ till $f(t)$. **2p.**
b). Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + y = f(t)$, $y(0) = 1$. **2p.**

6. Betrakta ekvationen

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

Bestäm två linjärt oberoende potensserielösningar kring $x = 0$. Ange ett öppet intervall där potensserielösningarna ovan säkert konvergerar.

7. Avgör om den kritiska punkten $(0, 0)$ för systemet nedan är asymptotiskt stabil, stabil men inte asymptotiskt stabil, eller instabil:

$$\begin{cases} x' = -2xy^2 - x^3 \\ y' = -y + x^2 y. \end{cases}$$

Tips: Använd en Lyapunovfunktion på formen $V(x, y) = ax^2 + y^2$.

8. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Fullständig motivering krävs! Varje korrekt delsvar ger 1p.

a). Det finns ett öppet intervall I, innehållande 0, sådant att begynnelsevärdesproblemet $\frac{d\phi}{dt} = \phi^{1/3}$, $\phi(0) = 0$ har en unik lösning på I.
b). Det finns en unik lösning $y(t)$ till begynnelsevärdesproblemet

$$y''(t) + \sin(t)y'(t) + \cos(t)y(t) = 0, \quad y(0) = 1$$

definierad för alla t.
c). Låt $f(y)$ vara en kontinuerligt deriverbar funktion. En lösning $y = \phi(t)$ till ekvationen

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

kan inte ha en sträng lokal maximipunkt (dvs en sådan punkt t_0 att $\phi(t) < \phi(t_0)$ för alla t tillräckligt nära t_0, $t \neq t_0$).
d). Låt $g(t)$ vara en kontinuerlig funktion. Om $y_1(t)$ och $y_2(t)$ är två lösningar till ekvationen

$$\frac{dy}{dt} = g(t)y(t),$$

(definierade på $\mathbb{R}$), och om $y_1(t)$ inte är identiskt lika med noll, så finns det en konstant c sådan att $y_2(t) = cy_1(t)$ för alla $t \in \mathbb{R}$.