SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 7

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

14 november 2016

Dagens ämnen:

- Räkna med matriser
- Linjära avbildningar
- Matriser och linjära avbildningar

Kapitel 3.1 och 3.2 i boken.

Inledande exempel

Inledande exempel, på datorskärmen:

1. Flytta ett område en bit åt höger
2. Rotera en bild 90 grader
3. Spegla ett objekt i en linje
4. Projicera på en linje

Detta är exempel på avbildningar (funktioner) från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$.
Tre av dem är **linjära avbildningar** och ges av **matriser**.

Matriser

Matriser är rektangulära tabeller av tal, med ett visst antal rader och ett visst antal kolonner. Med m rader och n kolonner sägs matrisen vara en $m \times n$-matris.

Matriser (av samma format!) kan **adderas**. Det sker elementvis.

Matriser kan **multipliceras med tal**. Det sker så att alla element i matrisen multipliceras med talet.

Matriser av format $m \times n$ med addition och skalärmultiplikation enligt ovan uppfyller **vektorrumsaxiomen.**

Exempel

En godtycklig matris A kan skrivas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Observera att a_{ij} betecknar elementet på rad i och kolonn j.

Exempel

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}, \qquad (tA)_{ij} = t(A)_{ij}$$

Uppgift:

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} \pi & -1 \\ 20 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- Vilket format ($m \times n$) har matriserna A och B?
- Beräkna $A + B$ och $3A$
- Vad krävs för att två matriser ska vara lika?

Matristransponat

Definition. Om A är en $m \times n$-matris så definierar man dess transponat genom $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$. Dvs transponatet är den $n \times m$-matris som har raderna i A som kolonner.

Exempel :

Om $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ så är $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Observera att $\left(A^T\right)^T = A$ och $(A+B)^T = A^T + B^T$ och $(tA)^T = tA^T$

Multiplikation av matriser.

Om A är en $m \times n$-matris och B är en $n \times p$-matris så är AB den $m \times p$-matris vars element på rad i kolonn j är skalärprodukten mellan rad i i A och kolonn j i B.

Uppgift:

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Är det någon av multiplikationerna AB och BA som är definierad? Beräkna den i så fall!

2. Är matrismultiplikation kommutativ?

Några fakta

Sats. Om A, B och C är matriser sådana att nedanstående produkter är definierade, och $t \in \mathbf{R}$, så gäller:

1. $A(B + C) = AB + AC$
2. $t(AB) = (tA)B = A(tB)$
3. $A(BC) = (AB)C$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Obs: Om $AC = BC$ så behöver inte A vara lika med C. Vi har ingen division för matriser.

Identitetsmatriser

Identitetsmatriser. Identitetsmatriser är kvadratiska matriser med bara 1:or på diagonalen och 0:or på alla andra platser, exempel:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uppgift: Om A är en 3×3-matris och I är matrisen ovan, vad blir AI och IA?

Linjära ekvationssystem. Hur kan man skriva

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

med hjälp av matrismultiplikation?

Linjära avbildningar och matrisavbildningar.

En **linjär avbildning** L från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$ är en funktion sådan att för alla $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ och alla $t \in \mathbf{R}$ gäller att

$$\begin{aligned} L(\vec{x} + \vec{y}) &= L(\vec{x}) + L(\vec{y}) \\ L(t\vec{x}) &= tL(\vec{x}) \end{aligned}$$

En **matrisavbildning** M från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$ är en funktion sådan att man räknar ut funktionsvärdet genom multiplikation med en matris, dvs det finns en $m \times n$-matris A sådan att för alla $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ gäller att

$$M(\vec{x}) = A\vec{x}$$

Linjära avbildningar och matrisavbildningar.

Sats. Alla matrisavbildningar är linjära avbildningar och alla linjära avbildningar är matrisavbildningar.

Bevis. Att matrisavbildningar är linjära är lätt att kolla. Omvändningen, att linjära avbildningar ges av matriser, följer av detta resonemang där vi också konstruerar matrisen till avbildningen: Om f är linjär, så gäller att

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \cdots + x_n\vec{e_n}) \\ &= x_1 f(\vec{e_1}) + x_2 f(\vec{e_2}) + \cdots + x_n f(\vec{e_n}) \\ &= \begin{bmatrix} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & \dots & f(\vec{e_n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Operatorer

En **linjär avbildning** från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^n$ (samma dimension!) kallas ofta en **linjär operator.**

Exempel

Vilka av nedanstående avbildningar från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$ är linjära? Finn i förekommande fall matriserna till avbildningarna.

1. Rotation 90 grader moturs
2. Projektion på x_1-axeln
3. Spegling i x_2-axeln
4. Translation 5 enheter i x_2-riktningen
5. Projektion på linjen $x_1 = x_2$

Sats.

Om den linjära avbildningen $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ ges av matrisen A och den linjära avbildningen $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ ges av matrisen B så är den sammansatta avbildningen $f \circ g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ linjär och ges av matrisen BA.

En tentamensuppgift

Dagens tentaproblem.

Låt $T_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som har standardmatris

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

(a) Låt L vara den linje som ges av $2x - 3y = -11$. Visa att T_A avbildar L på en linje $T_A(L)$.

(b) Hitta en linje L' sådan att $T_A(L')$ är en punkt. Ange en ekvation för L'.