SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 8

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

16 november 2016

Dagens ämnen (kap 3.3 och 3.4):

- Exempel på linjära avbildningar
- Nollrum och Bildrum
- Dimensionssatsen / Rangsatsen

Linjära avbildningar och matrisavbildningar.

En **linjär avbildning** L från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$ är en funktion sådan att för alla $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ och alla $t \in \mathbf{R}$ gäller att

$$L(\vec{x} + \vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$$
$$L(t\vec{x}) = tL(\vec{x})$$

Sats. Alla matrisavbildningar är linjära avbildningar och alla linjära avbildningar är matrisavbildningar. Den linjära avbildningens matris har bilderna av basvektorerna som kolonner.

Gårdagens tentaproblem.

Låt $T_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som har standardmatris

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

(a) Låt L vara den linje som ges av $2x - 3y = -11$. Visa att T_A avbildar L på en linje $T_A(L)$.

(b) Hitta en linje L' sådan att $T_A(L')$ är en punkt. Ange en ekvation för L'.

Några geometriska avbildningar $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ som är linjära.

1. Rotation θ radianer moturs
2. Projektion på en linje genom origo (ex linjen $x_2 = 2x_1$)
3. Spegling i en linje genom origo (ex linjen $x_2 = 2x_1$)

Sats.

Om den linjära avbildningen $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ ges av matrisen A och den linjära avbildningen $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ ges av matrisen B så är den sammansatta avbildningen $f \circ g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ linjär och ges av matrisen BA.

Exempel.

Bestäm matrisen för den linjära avbildning $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ som består i att man först roterar alla vektorer $\pi/4$ radianer moturs och sedan projicerar resultatet på x_1-axeln.

Några geometriska avbildningar $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som är linjära.

1. Rotation θ radianer i positiv led runt x_3-axeln (eller runt någon annan linje)
2. Projektion på en linje eller ett plan genom origo (ex planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$)
3. Spegling i en linje eller ett plan genom origo (ex planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$)

Lösningsrum till homogent linjärt ekvationssystem.

Låt A vara en $m \times n$ matris. Då är mängden $S = \{\vec{x} : A\vec{x} = \vec{0}\}$ ett delrum till $\mathbf{R}^n$. S kallas lösningsrummet till ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$.

Bevis?

Nollrum till en linjär avbildning / matris.

Låt L vara en linjär avbildning från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$. Då är mängden

$$N = \{\vec{x} : \; L(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

ett delrum till $\mathbf{R}^n$.

N består alltså av alla vektorer som avbildas på nollvektorn och kallas **nollrummet** till L alternativt **kärnan** till L. Betecknas ofta $\mathrm{Null}(L)$ eller $\ker(L)$.

Eftersom linjära avbildningar ges av matriser talar man också om nollrum till matriser, men oftast säger man då nullity, dvs om A är en matris så är $\mathrm{nullity}(A) = \{\vec{x} : \; A\vec{x} = \vec{0}\}$

Bildrum till en linjär avbildning / matris.

Låt L vara en linjär avbildning från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$. Då är mängden

$$B = \{\vec{y} : \ \vec{y} = L(\vec{x}) \ \text{för något } \vec{x}\}$$

ett delrum till $\mathbf{R}^m$.

B består alltså av alla vektorer som är funktionsvärden till L och kallas **bildrummet** till L. Betecknas ofta Range(L) eller Im(L).

Eftersom linjära avbildningar ges av matriser talar man också ibland om bildrum till matriser. I detta fall talar man hellre om kolonnrummet till A, Col(A), som är det delrum till $\mathbf{R}^m$ som spänns upp av A :s kolonner.

Exempel.

1. Låt L vara den linjära avbildning som ges av multiplikation med matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ -1 & 21 & -2 \end{bmatrix}$. Bestäm $\ker(L)$ och $\mathrm{Im}(T)$. Ange baser för $\ker(T)$ och $\mathrm{Im}(T)$. Ange dimensionerna av $\ker(T)$ och $\mathrm{Im}(T)$.

2. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Bestäm nollrum och bildrum till avbildningen $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som ges av $f(\vec{x}) = \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{x}$

Exempel.

1. Låt T vara den linjära avbildning från $\mathbf{R}^4$ till $\mathbf{R}^3$ som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Bestäm baser för $\ker(T)$ och $\operatorname{Im}(T)$ och ange deras dimensioner.

2. Bestäm nollrum och bildrum till den linjära avbildning i planet som består i projektion på linjen $x_1 = 3x_2$.

Dimensionssatsen / Rangsatsen

Dimensionssatsen för linjära avbildningar:

Om $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ är en linjär avbildning så är

$$\dim \operatorname{Im}(T) + \dim \ker(T) = n$$

Rangsatsen för matriser:

Om A är en $m \times n$ matris så gäller att

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{nullity}(A) = n$$

Observera att Dimensionssatsen och Rangsatsen är samma sats!

Några observationer.

1. Om T är en linjär avbildning från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$ sådan att $T\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$ och $T\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ så är det lätt att bestämma standardmatrisen för T genom att lösa ett ekvationssystem.

2. Om T är den linjära avbildning från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^3$ som ges av matrisen $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\-3 & -2\end{bmatrix}$) så är det lätt att avgöra om vektorn $\begin{bmatrix}2\\5\\1\end{bmatrix}$ ligger i bildrummet för T genom att lösa ett ekvationssystem.