Kortfattat lösningsförslag till Kompletteringstentamen, SF1633, Differentialekvationer I den 16 november 2016 kl. 17 - 19.

Varje moduluppgift består av tre frågor. För att bli godkänd på modulen krävs rätt svar på minst två av dessa frågor. Gör endast den moduluppgift (en uppgift) som saknas från tentamen/lappskrivningar.
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen *BETA: Mathematics Handbook* av Råde och Westergren.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och väl motiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt. Samtliga svar ska vara på reell form.

Del I

Modul 1. Betrakta differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)^2.$$

a) Bestäm och klassificera samtliga stationära (kritiska) punkter med avseende på stabilitet/instabilitet.

b) Skissa lösningskurvorna till ekvationen, för $x > 0$, då $y(0) = 0$ samt då $y(0) = 1$.

c) Lös begynnelevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)^2, \quad y(0) = 0.$$

Lösning: Se Exempel 5 i kapitel 2.1 i kursboken.

a) De kritiska punkterna ges av $(y-1)^2 = 0$, dvs $y = 1$ är den enda kritiska punkten. Eftersom $(y-1)^2 > 0$ för alla $y \neq 1$ måste alla lösningar vara växande. Således får vi följande faslinje:

$$----> ------(1)----> ------$$

Detta betyder att den kritiska punkten $y = 1$ är semi-stabil. (Enligt definitionen av stabilitet/instabilitet betyder detta att punkten är instabil, eftersom det finns punkter godtyckligt nära $y = 1$ som rör sig i väg från den kritiska punkten.)

b) Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger en lösning $y(x)$ som är strängt växande och som närmar sig den horisontella linjen $y = 1$ då x växer. Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger den konstanta lösningen $y(x) = 1$. Rita figur.

c) Ekvationen är separabel och kan skrivas på formen

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = dx.$$

Här antar vi att $y \neq 1$. Integrering ger

$$-\frac{1}{y-1} = x + c$$

vilket ger oss

$$y = 1 - \frac{1}{x+c}.$$

Begynnelsevillkoret ger

$$0 = y(0) = 1 - \frac{1}{c}$$

dvs $c = 1$. Således,

$$y = 1 - \frac{1}{x+1}$$

är den sökta lösningen.

Modul 2. Betrakta differentialekvationen

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad x > 0.$$

a) Funktionen $y_1 = x^2$ är en lösning till differentialekvationen. Bestäm en lösning y_2 till ekvationen sådan att y_1 och y_2 är linjärt oberoende på intervallet $x > 0$.

b) Verifiera, genom insättning i ekvationen, att y_1 och y_2 verkligen är lösningar till ekvationen, samt att de är linjärt oberoende på intervallet $x > 0$.

c) Bestäm den lösning $y(x)$ till ekvationen som uppfyller $y(1) = 1, y'(1) = 3$.

Lösning: Se Exempel 1 i kapitel 4.2 i kursboken.

a) Vi använder reduktion av ordning för att hitta en lösning y_2. Vi gör ansatsen $y(x) = u(x)y_1(x) = x^2u(x)$. Insättning i ekvationen ger (efter lite förenkling)

$$x^4u'' + x^3u' = 0.$$

Eftersom $x > 0$ kan vi dividera med x^3 vilket ger oss

$$xu'' + u' = 0.$$

Låter vi $v = u'$ kan denna ekvation skrivas $xv' + v = 0$. Vi noterar att denna ekvation redan är på "rätt" form (skriver vi ekvationen på standardform och multiplicerar med den integrerande faktorn fås precis detta uttryck), dvs ekvationen kan skrivas $\frac{d}{dx}(xv) = 0$. Integrering ger $xv = c_1$, dvs $v = c_1/x$ där c_1 är en konstant. Eftersom $v = u'$ får vi

$$u = c_1 \ln x + c_2.$$

Således är $y = ux^2 = (c_1 \ln x + c_2)x^2$ en lösning till ekvationen för varje val av konstanterna c_1, c_2. Speciellt är $y_2 = x^2 \ln x$ en lösning. Vi verifierar i b) att y_1 och y_2 är linjärt oberoende på $x > 0$.

b) Vi verifierar först att $y_2 = x^2 \ln x$ är en lösning (på samma sätt verifieras att $y_1 = x^2$ också är en lösning; gör det!). Vi har

$$y_2' = 2x \ln x + x, \quad y_2'' = 2 \ln x + 3.$$

Detta ger att

$$x^2y_2'' - 3xy_2' + 4y = x^2(2 \ln x + 3) - 3x(2x \ln x + x) + 4(x^2 \ln x) = 0$$

för alla $x > 0$. Således är y_2 en lösning till ekvationen.

Vi verifierar nu att y_1 och y_2 är linjärt oberoende på $x > 0$ genom att använda Wronskideterminaten. Vi har

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \ln x \\ 2x & 2x \ln x + x \end{vmatrix} = x^3 \neq 0 \text{ för } x > 0.$$

Eftersom Wronskideterminanten är nollskild vet vi att lösningarna är linjärt oberoende på intervallet $x > 0$.

c) Eftersom vi har två linjärt oberoende lösningar vet vi att den allmänna lösningen till ekvationen (på intervallet $x > 0$) är

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x.$$

Konstanterna c_1 och c_2 bestäms nu så att $y(1) = 1$ och $y'(1) = 3$. Vi får att $c_1 = c_2 = 1$, dvs den sökta lösningen är

$$y = x^2 + x^2 \ln x.$$

Modul 3. Låt

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

a) Använd Laplacetransformens definition för att bestämma $\mathscr{L}\{f(t)\}$ (Laplacetransformen till $f(t)$).
b) Antag att $y(t)$ är lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y' - y = f(t), \quad y(0) = 1.$$

Bestäm $Y(s)$ (där $Y(s)$ är Laplacetransformen till $y(t)$, dvs $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$).
c) Bestäm lösningen $y(t)$ i b).

Lösning: a) Enligt defintion har vi

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^1 e^{-st}dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^1 = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}.$$

(Vi ser att detta svar sammanfaller med formel L100 då $a = 0$ och $b = 1$.)

b) Vi Laplacetransformerar ekvationen och utnyttjar begynnelsevillkoret samt resultatet från a):

$$sY(s) - 1 - Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

vilket ger

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s(s-1)} - \frac{e^{-s}}{s(s-1)}.$$

c) Vi använder nu inverstransform. Formlerna L21, L28 samt L4 ger oss

$$y(t) = e^t + (-1 + e^t) - u(t-1)(-1 + e^{t-1}) = 2e^t - 1 - u(t-1)(-1 + e^{t-1}),$$

där $u(t)$ är Heavisides stegfunktion.