SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 9

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

18 november 2016

Dagens ämnen (kap 3.5):

- Invers av linjär avbildning
- Invers av matris

(Dessutom ska vi repetera lite från förra gången, rätta några fel och räkna några tentaproblem.)

Identitetsavbildningen och identitetsmatrisen

Linjära avbildningar kan gå från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$, för vilka n och m som helst men när vi pratar om **identitetsavbildningen** och **inverser** så krävs det att $n = m$. Annars funkar det inte.

Definition. Identitetsavbildningen Id på $\mathbf{R}^n$ är den avbildning som ges av

$$\mathrm{Id}(\vec{x}) = \vec{x}, \qquad \text{för alla vektorer } \vec{x}$$

Identitetsavbildningens matris är den $n \times n$-matris som har 1:or på diagonalen och alla andra element är 0. Denna matris kallas identitetsmatrisen (eller enhetsmatrisen) av format $n \times n$.

Observation: Om I_n är identitetsmatrisen av format $n \times n$ så gäller för alla $n \times n$-matriser A att $AI_n = I_nA = A$.

Definition av Invers.

Låt $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ (samma n!) vara en linjär avbildning. Om det finns en linjär avbildning S sådan att $T \circ S = S \circ T =$ Id så sägs T vara inverterbar med invers S. Ofta skrivs inversen T^{-1}.

Låt A vara en $n \times n$-matris (samma n!). Om det finns en matris B sådan att $AB = BA =$Identitetsmatrisen av format $n \times n$ så sägs matrisen A vara inverterbar med invers B. Ofta skrivs inversen B^{-1}.

Exempel.

1. Låt T vara den linjära avbildning som har standardmatris

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Avgör om T är inverterbar och bestäm i så fall matrisen för T^{-1}

2. Låt L vara den linjära avbildning som har standardmatris

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & -11 \end{bmatrix}.$$

Avgör om L är inverterbar och bestäm i så fall matrisen för L^{-1}

Uppgifter:

1. Låt T vara den linjära avbildning som har standardmatris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Avgör om T är inverterbar och bestäm i så fall matrisen för T^{-1}

2. Låt L vara den linjära avbildning som har standardmatris

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Avgör om L är inverterbar och bestäm i så fall matrisen för L^{-1}

Uppgifter

1. Tidigare såg vi att

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Använd detta för att lösa ekvationsystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. Tidigare såg vi att

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{har invers} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Använd detta för att hitta en matris X sådan att

$$MX = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observationer

1. Icke-kvadratiska matriser kan aldrig ha invers

2. $n \times n$-matrisen A är inverterbar om och endast om rank(A)=n

3. Fler påståenden som är ekvivalenta med 2 ovan listas i boken. T ex att kolonnrummet till A är hela $\mathbf{R}^n$ och att nollrummet till A är $\{\vec{0}\}$.

Exempel

Highway 61 revisited.

1. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^3$ som består projektion på planet med ekvation

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0.$$

2. Bestäm också nollrum och bildrum till denna avbildning.

Fyra fundamentala delrum till en matris.

Via exemplet

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

ska vi diskutera de fyra fundamentala delrum som associeras till en matris, nämligen

$$\ker(M), \quad \mathrm{Col}(M), \quad \ker(M^T), \quad \mathrm{Col}(M^T)$$