Lösningar Reglerteknik AK Tentamen 2016–10–22

Uppgift 1a

$$G_c(s) = \frac{G(s)F(s}{1+G(s)F(s)} = \frac{1}{s+3}, \quad Y(s) = \frac{1}{s+3}\frac{1}{s} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+3}\right))$$

$$\textbf{Svar:} \quad y(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t}\right)$$

Uppgift 1b

Svar:

(i) insignal u = levererad insulinmängd från pumpen, mha tex spänningen till pumpen

(ii) utsignal y = sockerhalt i blodet

(iii) referenssignal r = normal sockerhalt i blodet

(iv) störsignal v = sockerintag via mat

Uppgift 1c

Kontrollera först om systemet är stabilt (annars existerar inte gränsvärdet) . Egenvärdena ges av $s^2 + 3s + 3$ dvs systemet är stabilt eftersom koefficienterna är positiva.
Stationär punkt: $\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$, $x_1 = -0.5r$, $y = x_2 \Rightarrow y = 0.5r \Rightarrow e = r - y = 0.5r = 2.5$,
Svar: Det stationära felet är 2.5.
Observera att man måste analysera stabilititet för att få helt rätt på uppgiften.

Uppgift 1d

Svar:

- Stegsvar A motsvarar P-regulatorn $F_1(s)$ eftersom stegsvaret är mer odämpat än i Figur B. Det har ett stationärt fel så det kan inte PI-regulatorn $F_3(s)$
- Stegsvar B motsvarar PD-regulatorn $F_2(s)$ eftersom stegsvaret är mer dämpat än i Figur A.
- Stegsvar C motsvarar PI-regulatorn $F_3(s)$ eftersom det är enda stegsvaret utan stationärt fel.

Uppgift 2a-i

Systemet är skrivet på formen $\dot{x}_1 = f_1(x, u)$ och $\dot{x}_2 = f_2(x, u)$ där $f_1(x, u) = \sin(x_2)$ och $f_2(x, u) = x_2 + u$, linjäriseringen ges av

$$\dot{x} = \frac{df}{dx}(x^0, u^0)x + \frac{df}{du}(x^0, u^0)u = Ax + Bu$$

där $[x^0, u^0]^T = [0, \pi, -\pi]^T$ är linjäriseringspunkten:

$$A = \frac{df}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & cos(x_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och

$$B = \frac{df}{du} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{du} \\ \frac{df_2}{du} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Svar:

$$\Delta\dot{x}_t = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u(t)$$

med $\Delta x(t) = [x_1(t),\ x_2(t) - \pi]^T$ och $\Delta u(t) = u(t) + \pi$

Uppgift 2a-ii

Systemet är styrbart eftersom

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

är full rang. Vi beräknar $L = [l_1\ l_2]$ så att egenvärdena hos matrisen $A - BL$ hamnar i $-3, -4$. Vi får

$$A - BL = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -l_1 & 1 - l_2 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(\lambda I - (A - BL)) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ l_1 & \lambda - 1 + l_2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1 + l_2) - l_1 = \lambda^2 + (l_2 - 1)\lambda - l_1 = 0$$

Vi vill ha poler i $-3, -4$ så vi vill ha det karakteristiska polynomet

$$0 = (\lambda + 3)(\lambda + 4) = \lambda^2 + 7\lambda + 12$$

så vi identifierar $l_1 = -12$ och $l_2 - 1 = 7 \Rightarrow l_2 = 8$.
Svar: $\Delta u(t) = -[-12\ 8]\Delta x(t)$

Uppgift 2b-i

Systemet är observerbat eftersom

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

är full rang. Det skattade systemet ges av

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - \hat{y}) = A\hat{x} + Bu + K(x_1 - \hat{x}_1) = (A - KC)\hat{x} + Bu$$

Polerna till observatören ges av egenvärdena till $A - KC$ med $K = (k_1, k_2)^T$ fås

$$A - KC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Polerna fås sedan ur

$$0 = \det(\lambda I - (A - KC)) = \begin{vmatrix} \lambda + k_1 & -1 \\ k_2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + k_1)\lambda + k_2 = \lambda^2 + k_1\lambda + k_2 = 0$$

Vi vill ha dubbelpol i $-\alpha$ så vi vill ha det karakteristiska polynomet

$$0 = (\lambda + \alpha)^2 = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \alpha^2$$

så vi identifierar $k_1 = 2\alpha$ och $k_2 = \alpha^2$.
Svar: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - \hat{y})$ med $K = [\alpha\ \alpha^2]^T$

Uppgift 2b-ii

Överföringsfunktionen från störsignal till skattningsfelet $\tilde{y} = C\tilde{x} + v$ för blir (boken sidan 199, formel 9.31)

$$G_{v \to \tilde{y}}(s) = 1 - C(sI - (A - KC))^{-1}K$$

där K bestämdes i Uppgift 2b-i). Insättning ger

$$G_{v \to \tilde{y}}(s) = 1 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} 1 - \begin{pmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - \frac{k_1 s + k_2}{s^2 + k_1 s + k_2} = 1 - \frac{2\alpha s + \alpha^2}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2} = \frac{(s + \alpha)^2 - 2\alpha s - \alpha^2 s}{(s + \alpha)^2} = \frac{s^2}{(s + \alpha)^2}$$

Uppgift 3a

Svar: T_1 är en tidskonstant relaterad till dynamik, t.ex. orsakad av tröghet. T_2 är en ren tidsfördröjning, orsakad av t.ex. masstransport.

Uppgift 3b

Vi följer lead-lag algoritmen stegvis. Vi kan antingen använda Bode-diagramet vi har fått uppritat, eller så kan vi räkna med hjälp av uttrycket för $G(s)$.

1. Nuvarande skärfrekvens:

$$\begin{aligned} 1 = |G(i\omega_c)| &= \left|\frac{K_1}{1+T_1(i\omega_c)}\right| = \frac{K_1}{\sqrt{1+T_1^2\omega_c^2}} \implies \\ \omega_c &= \frac{\sqrt{K_1^2-1}}{T_1}. \end{aligned}$$

   Numeriskt har vi $\omega_c \approx 0.0289$.

2. Önskad skärfrekvens: $\omega_{cd} = 2\omega_c \approx 0.0577$.

3. Nuvarande fasmarginal:

$$\begin{aligned} \phi_m &= \arg G(i\omega_c) - (-180^\circ) \\ &= \arg \frac{K_1}{1+T_1 i\omega_c} e^{-T_2 i\omega_c} + 180^\circ \\ &= \arg K_1 - \arg(1+T_1\omega_c i) + \arg e^{-T_2\omega_c i} + 180^\circ \\ &= 0^\circ - \arctan\big(\frac{T_1\omega_c}{1}\big) - T_2\omega_c + 180^\circ \\ &= 180^\circ - \arctan(T_1\omega_c) - T_2\omega_c. \end{aligned}$$

   Numeriskt har vi att $\phi_m \approx 103.5^\circ$.

4. Hur mycket måste vi fasöka vid ω_{cd} för att ha samma fasmarginal som innan? (Kom ihåg att ta hänsyn till lag-länken som kommer sänka fasen med 5.7° enligt tumregel.)

$$\begin{aligned} \phi_m &= \big[\arg G(i\omega_{cd}) - 5.7^\circ + \Delta\phi\big] - (-180^\circ) \\ &= 180^\circ - 5.7^\circ + \Delta\phi - \arctan\big(T_1\omega_{cd}\big) - T_2\omega_{cd} \implies \\ \Delta\phi &= \phi_m - 180^\circ + 5.7^\circ + \arctan\big(T_1\omega_{cd}\big) + T_2\omega_{cd} \end{aligned}$$

   Numeriskt har vi att $\Delta\phi \approx 36.1^\circ$.

5. Bestäm β så att vi får denna fasökning av lead-länken enligt Figur 5.13 i boken, eller formel (5.4):

$$\beta = \frac{1-\sin\Delta\phi}{1+\sin\Delta\phi} \approx 0.258\,.$$

6. Välj τ_D så att den maximala fasavanceringen sker vid vår önskade skärfrekvens:

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_{cd}\sqrt{\beta}} \approx 34.1\,.$$

7. Välj förstärkningen K så att vi får önskad skärfrekvens i systemet. Använd att vi valt $\tau_D = \frac{1}{\omega_{cd}\sqrt{\beta}} \Leftrightarrow \omega_{cd} = \frac{1}{\tau_D\sqrt{\beta}}$, samt formel (5.6) i boken:

$$1 = \left|F_{\text{lead}}(i\omega_{cd})G(i\omega_{cd})\right| = \left|F_{\text{lead}}(i\frac{1}{\tau_D\sqrt{\beta}})\right|\left|G(i\omega_{cd})\right| \overset{(5.6)}{=} \frac{K}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{K_1}{\sqrt{1+T_1^2\omega_{cd}^2}},$$

som ger att

$$K = \sqrt{\beta} \cdot \frac{\sqrt{1+T_1^2\omega_{cd}^2}}{K_1}.$$

Numeriskt ger detta att $K \approx 0.916$.

8. Välj τ_I enligt tumregel:

$$\tau_I = \frac{10}{\omega_{cd}} \approx 173.2\,.$$

9. Bestäm γ så att vi får tillräckligt litet stationärt (steg)fel. Vi vill ha att $e_0 \leq 0.05$ enligt specifikationerna. Använd formel (3.25), samt (5.12):

$$\begin{aligned} 0.05 \geq e_0 &\overset{(3.25)}{=} \frac{1}{1+G_0(0)} \overset{(5.12)}{=} \frac{1}{1+G(s)\cdot K\frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D s+1}\frac{\tau_I s+1}{\tau_I s+\gamma}}\Bigg|_{s=0} = \frac{1}{1+G(0)\frac{K}{\gamma}} \\ &= \frac{1}{1+\frac{K_1}{1+T_1\cdot 0}e^{-T_2\cdot 0}\cdot\frac{K}{\gamma}} = \frac{1}{1+\frac{k_1 K}{\gamma}} \end{aligned}$$

Löser vi ut γ ur olikheten får vi att

$$\gamma \leq \frac{k_1 K}{\frac{1}{0.05}-1} \approx 0.096\,.$$

Svar: Vår regulator blir alltså

$$F(s) = 0.916 \cdot \frac{34.1s+1}{0.258\cdot 34.1s+1} \cdot \frac{173.2s+1}{173.1s+0.096},$$

vilket ger en skärfrekvens på ca 0.059 och en fasmarginal på 103.3° i det kompenserade systemet (notera att lag-länken flyttat skärfrekvensen något). Notera också att fasmarginalen är ovanligt stor för en praktisk tillämpning.

Uppgift 3c

Lag-länken sänker fasen med

$$\arg F_{\text{lag}}(i\omega) = -\arctan\frac{(1-\gamma)\tau_I\omega}{\gamma+\tau_I^2\omega^2}$$

vid frekvensen ω, se formel (5.10) i boken. För att få ett stabilt återkopplat system måste vi ha positiv fasmarginal ϕ_m, alltså kan vi som mest sänka fasen med ϕ_m vid den nya skärfrekvensen ω_{cd}:

$$\begin{aligned}
\phi_m &= \arctan\frac{(1-\gamma)\tau_I\omega_{cd}}{\gamma+\tau_I^2\omega_{cd}^2} && \Longrightarrow \\
(\gamma+\tau_I^2\omega_{cd}^2)\tan(\phi_m) &= (1-\gamma)\tau_I\omega_{cd} && \Longrightarrow \\
\tau_I^2\omega_{cd}^2\tan(\phi_m)+\gamma\tan(\phi_m)-(1-\gamma)\tau_I\omega_{cd} &= 0 && \Longrightarrow \\
\tau_I^2-\frac{(1-\gamma)\omega_{cd}}{\omega_{cd}^2\tan(\phi_m)}\tau_I+\frac{\gamma\tan(\phi_m)}{\omega_{cd}^2\tan(\phi_m)} &= 0 && \Longrightarrow \\
\tau_I^2-\frac{(1-\gamma)}{\omega_{cd}\tan(\phi_m)}\tau_I+\frac{\gamma}{\omega_{cd}^2} &= 0
\end{aligned}$$

Löser vi denna andra-grads ekvation med de givna numeriska värderna (och $\gamma = 0.096$) får vi de två lösningarna

$$\tau_{I,1} = 52.4, \quad \tau_{I,2} = 0.552.$$

Om vi sänker från vårt ursprungliga värde på τ_I kommer $\tau_{I,1}$ stötas på först.

Svar: Vi kan sänka τ_I till ca 55 innan vi stöter på problem med instabilitet.

Uppgift 4a

Från den givna Nyquistkurvan erhålls

- $\omega_c = 0.51$ rad/s;
- $\omega_p = 0.58$ rad/s;
- $\varphi_m = \arctan(\frac{0.13}{0.99}) = 7.48°$;
- $A_m = \frac{1}{0.8} = 1.25$.

Den efterfrågade skärfrekvensen ges av

$$\omega_{c,d} = 2\,(0.51) = 1.02\text{rad/s}$$

Från Nyquistkurvan erhålls

$$|G(i1.02)| = \sqrt{0.17^2 + 0.12^2} = 0.2081$$

P-regulatorn skalar hela Nyquistkurvan med K_P, så för att flytta skärfrekvensen till $\omega_{c,d}$ krävs att

$$\begin{aligned}
|K_P G(i1.02)| &= 1 \\
\Rightarrow K_P &= \frac{1}{0.2081} \approx 4.81
\end{aligned}$$

Observera att

$$|K_P G(i\omega_p)| = 4.810.8 \approx 3.85$$

vilket innebär att Nyquistkurvan nu befinner sig till vänster om -1, så att systemet blir instabilt. **Svar:** $F(s) = 4.81$

Uppgift 4b

Den efterfrågade skärfrekvensen ges fortfarande av

$$\omega_{c,d} = 1.02\text{rad/s}$$

Hur påverkar $F(s) = K_D s$ Nyquistkurvan?

Belopp:

$$\begin{aligned} |F(i\omega)G(i\omega)| &= |K_D\, i\omega \cdot G(i\omega)| \\ &= K_D\, \omega\, |G(i\omega)| \end{aligned}$$

Beloppet skalas alltså med $K_D\omega$.

Argument:

$$\begin{aligned} \arg\left(F(i\omega)G(i\omega)\right) &= \arg\left(K_D \cdot i\omega \cdot G(i\omega)\right) \\ &= \arg K_D + \arg i\omega + \arg G(i\omega) \\ &= 0 + \frac{\pi}{2} + \arg G(i\omega) \end{aligned}$$

Nyquistkurvan vrids alltså 90° *moturs.*

Bestäm först det K_D som krävs för att uppnå den efterfrågade skärfrekvensen

$$\begin{aligned} |K_D \omega_{c,d} G(i\omega_{c,d})| &= 1 \\ \Leftrightarrow K_D \cdot 1.02 \cdot 0.2081 &= 1 \\ \Rightarrow K_D &= \frac{1}{1.02 \cdot 0.2081} \approx 4.71 \end{aligned}$$

Efter rotationen skär Nyquistkurvan inte längre negativa Re-axeln, och således kan slutna systemet vara stabilt. Frekvensvaret vid $\omega_{c,d}$ vrids 90° moturs och skalas med $K_D\omega_{c,d}$, så specifikt gäller att $G(i\omega_{c,d}) = -0.17 + i0.12$ flyttas till

$$G_0(i\omega_{c,d}) = F(i\omega_{c,d})G(i\omega_{c,d}) = 4.71(-0.12 - i0.17) = -0.57 - 0.8i$$

Den nya fasmarginalen ges således av

$$\varphi_m = \arctan\left(\frac{0.8}{0.57}\right) = 54.5^\circ$$

Problemet är dock att vi har förkortat en pol i $s = 0$! Detta resulterat i instabilitet eftersom

$$G_{ly}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

kommmer att ha en pol i $s = 0$ från $G(s)$. Observera att $G(0)F(0)$ är ändlig.
Svar: $F(s) = 4.71s$, men systemet blir instablit pga förkortning av pol i $s = 0$.

Uppgift 4c

$$|F(i\omega_{c,d})|^2 = \alpha^2 K_P^2 + (1-\alpha^2)K_D^2\omega_{c,d}^2 = K_D^2\omega_{c,d}^2$$

eftersom $K_P^2 = K_D^2\omega_{c,d}^2$ (båda regulatorna ger sammma skärfrekvens). Följaktligen så är $|F(i\omega_{c,d})|$ oberoende av α och har samma förstärking vid $\omega_{c,d}$ som D-regulatorn och P-regulatorn. Det som skiljer är fasen, som är

$$\arg F(i\omega_{c,d}) = \arctan(\sqrt{1-\alpha^2})/\alpha)$$

Svar: För $\alpha = 1/\sqrt{2}$ får man 45^o i fasavancering från regulatorn och fasmarginalen blir därför 9.5^o, dvs stabilt (och ingen förkortning av pol i $s = 0$).

Uppgift 5a

Från blockdiagramet fås att:

$$\begin{aligned} S(s) &= \frac{1}{1+G(s)F(s)} = \frac{P_G(s)P_F(s)}{P_G(s)P_F(s) + Q_G(s)Q_F(s)}, \\ G(s) &= \frac{Q_G(s)}{P_G(s)},\ F(s) = \frac{Q_F(s)}{P_F(s)} \end{aligned}$$

Notera att $S(s)$ har samma instabila nollställen som $G(s)$ eftersom regulatorn $F(s)$ bara har stabila nollställen (antagande) och $P_G(s)P_F(s) + Q_G(s)Q_F(s)$ har alla rötter i vänster halvplan (stabilt). Endast stabila nollställen kan förkortas.

Uppgift 5b

Enligt ovan så har $S(s)$ ett nollställe i höger halvplan, nämligen p_4.

$$S(s) = S(s) \cdot \frac{s+p_4}{s-p_4}\frac{s-p_4}{s+p_4} = S_{mf}(s)\frac{s-p_4}{s+p_4}$$

Detta ger:

$$S_{ap}(s) = \frac{s-p_4}{s+p_4}$$

Uppgift 5b

Eftersom z_2 är ett instabilt nollställe till $G(s)$, så är $F(z_2)$ ändlig och därmed

$$S(z_2) = \frac{1}{1 + F(z_2)\,0} = 1$$

har vi med hjälp av vårt tidigare uträknade uttryck att:

$$S_{mf}(z_2)\,\frac{z_2 - p_4}{z_2 + p_4} = 1 \Rightarrow S_{mf}(z_2) = \frac{z_2 + p_4}{z_2 - p_4}$$

Detta ger oss villkoret:

$$\log|S_{mf}(z_2)| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log|G(i\omega)| \frac{z_2}{z_2^2 + \omega^2} d\omega = \ln|\frac{z_2 + p_4}{z_2 - p_4}| \tag{1}$$

Uppgift 5c

Om massan M är stor relativt till massan m och l_0 är liten relativt längden l så blir $z_2 \approx p_4$ och

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log|G(i\omega)| \frac{z_2}{z_2^2 + \omega^2} d\omega$$

blir stort oberoende av hur man reglerar systemet! Detta innebär att störningar förstärks mycket, och speciellt mycket för frekvenser $\omega < z_2$, eftersom

$$\frac{z_2}{z_2^2 + \omega^2} \approx 1/z_2$$

för ω mindre än z_2. Föra höga frekvensker får man approximativt viktning z_2/ω.
Ett nollställe i höger halvplan medför förstärkning av störningar vid frekvenser som ligger till vänster om nollstället i Bodediagramet. Att ha ett $l_0 < l$ gör alltså att systemet blir mycket mer känsligt för störningar och mycket mer svårreglerat!