SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 10

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

21 november 2016

Dagens och veckans ämnen

Idag: Allmänna vektorrum, baser, koordinater, kap 4.1-4.4:

- Vektorrum och delrum, igen
- Bas, igen
- Koordinater med avseende på en bas

På onsdag: Basbyte påverkar matrisen för en linjär avbildning.

På fredag: Halvvägs! Sammanfattning av kursen hittills

(Tips till den som tycker det är abstrakt: tänk på $\mathbf{R}^n$)

Låt oss fokusera lite

Detta måste man lära sig denna vecka:

- Koordinater i olka baser
- Basbytesmatris
- Matrisen för en linjär avbildning i olika baser

Exempel:

1. Är $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en bas för $\mathbf{R}^2$?

2. Vad blir koordinaterna i basen $\mathcal{B}$ för den vektor som i standardbasen $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ har koordinaterna $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$?

3. Vad är koordinaterna i basen $\mathcal{B}$ för vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$?

4. Vilken matris ska jag multiplicera med för att byta koordinater från basen $\mathcal{B}$ till $\mathcal{E}$?

Uppgifter:

1. Är $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en bas för $\mathbf{R}^2$?

2. Vad blir koordinaterna i basen $\mathcal{C}$ för den vektor som i standardbasen $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ har koordinaterna $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$?

3. Vad är koordinaterna i basen $\mathcal{C}$ för vektorn $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

4. Vilken matris ska man multiplicera med för att byta koordinater från basen $\mathcal{C}$ till $\mathcal{E}$?

5. Vilken matris ska man multiplicera med för att byta koordinater från basen $\mathcal{E}$ till $\mathcal{C}$

Exempel i $\mathbf{R}^n$

1. Är $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en bas för $\mathbf{R}^3$? Om inte, kan man utvidga S till en bas $\mathcal{B}$?

2. Finn en bas $\mathcal{B}$ för $\mathbf{R}^3$ bestående av två vektorer som parallella med planet $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ och en vektor som är ortogonal mot samma plan.

3. Finn en bas $\mathcal{B}$ för $S = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \right\}$. Utvidga $\mathcal{B}$ till en bas $\mathcal{C}$ för $\mathbf{R}^4$. Hur byter man koordinater från basen $\mathcal{C}$ till standardbasen? Hur byter man åt andra hållet? Vad blir koordinaterna i basen $\mathcal{C}$ för den vektor som i standardbasen har koordinater $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$?

Följande regler gäller för alla $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{R}^n$ och $s, t \in \mathbf{R}$

1. $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbf{R}^n$
2. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
3. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
4. $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
5. $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
6. $t\vec{x} \in \mathbf{R}^n$
7. $s(t\vec{x}) = (st)\vec{x}$
8. $(s + t)\vec{x} = s\vec{x} + t\vec{x}$
9. $t(\vec{x} + \vec{y}) = t\vec{x} + t\vec{y}$
10. $1\vec{x} = \vec{x}$

Vektorrumsaxiomen

Ett vektorrum över $\mathbf{R}$ är en mängd $\mathbf{V}$ med en addition $+$ och en multiplikation med tal s.a. för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$ och $s, t \in \mathbf{R}$:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{V}$
2. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
3. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
4. Det finns ett objekt $\mathbf{0}$ sådant att $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x}$
5. För alla $\mathbf{x}$ finns ett objekt $-\mathbf{x}$ sådant att $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
6. $t\mathbf{x} \in \mathbf{V}$
7. $s(t\mathbf{x}) = (st)\mathbf{x}$
8. $(s + t)\mathbf{x} = s\vec{x} + t\mathbf{x}$
9. $t(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = t\mathbf{x} + t\mathbf{y}$
10. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Vektorrum

Exempel på vektorrum över **R**:

- Mängden av kontinuerliga funktioner på (a, b)
- Mängden av polynom
- Mängden av polynom av grad högst 2
- Mängden av 2×2-matriser
- Mängden av 3×4-matriser
- Och många många fler!

Delrum

Definition. En icke-tom delmängd S av $\mathbf{V}$ sägs vara ett **delrum** till $\mathbf{V}$ om för alla vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ och skalärer $t \in \mathbf{R}$ gäller

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$
2. $t\mathbf{x} \in S$

Specialfall. $\{\mathbf{0}\}$ är ett delrum, kallat det triviala delrummet.
$\mathbf{V}$ är ett delrum till $\mathbf{V}$.

Exempel

Fråga 1:

Är mängden av alla lösningar till differentialekvaitonen

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

ett delrum till vektorrummet av kontinuerliga funktioner på $\mathbf{R}$?

Fråga 2:

Är mängden av alla kontinuerliga funktioner f sådana att $|f(x)| \leq 1$ ett delrum till vektorrummet av kontinuerliga funktioner på $\mathbf{R}$?

Span

En given mängd $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ av vektorer i $\mathbf{V}$ **spänner upp** ett delrum S till $\mathbf{V}$ genom

$$S = \{t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots + t_k\mathbf{v}_k : t_1, \dots, t_k \in \mathbf{R}\}$$

Dvs S är alla tänkbara **linjärkombinationer** av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$.

Vi skriver $S = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$.

Ett svenskt ord för span är **linjärt hölje**.

Linjärt beroende/oberoende

En given mängd $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ av vektorer i $\mathbf{V}$ sägs vara linjärt oberoende om ingen av dem kan skrivas som en linjärkombination av de övriga.

Ett annat sätt att säga samma sak:

Definition. En mängd $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ av vektorer i $\mathbf{V}$ sägs vara **linjärt oberoende** om ekvationen

$$t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots + t_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

bara har den triviala lösningen $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0$. Finns det någon icke-trivial lösning till ekvationen sägs mängden vektorer istället vara **linjärt beroende.**

Bas

Definition. Om en mängd $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ av vektorer i **V** **spänner upp V** och dessutom är **linjärt oberoende** så sägs $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vara en **bas** för V.

Bas och dimension

Sats. Om $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ är en bas för **V** så kan varje vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ på ett unikt sätt skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.

Definition. Koefficienterna i linjärkombinationen ovan kallas **koordinaterna** för **v** i basen $\mathcal{B}$.

Definition. Med **dimensionen** av **V** menar man antalet vektorer i en bas. Om det inte räcker med änligt många vektorer sägs **V** vara oändligtdimensionellt. Men om **V** har en bas med ett ändligt antal n element måste alla baser ha samma antal element.

Exempel:

1. Bestäm en bas för lösningsrummet till

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

och ange lösningsrummets dimension.

2. Är $y_1(t) = e^{-t}$ och $y_2(t) = 2e^{-t}$ linjärt oberoende?

Observation

Sats. Om **V** är ett vektorrum av ändlig dimension n, så utgör varje mängd av n linjärt oberoende vektorer en bas.

Bevis. Följer av att alla baser har lika många element och att varje linjärt oberoende mängd vektorer kan utvidgas till en bas.

1. Är $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ en bas för $\mathbf{M}(2,2)$?

2. Avgör om $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ligger i $\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

3. Är $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ en bas för $\mathbf{P}_2$? Ange i så fall koordinaterna för polynomet $p(x) = 2 - x^2$ i den basen.

4. Är $\mathcal{C} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ en bas för $\mathbf{P}_2$? Ange i så fall koordinaterna för polynomet $p(x) = 2 - x^2$ i den basen. Hur byter jag koordinater från $\mathcal{C}$ till $\mathcal{B}$?

5. Bestäm dimensionen av $\mathbf{P}_2$.

6. Låt $p(x) = 1 + x$, $q(x) = 2 + x^2$ och $r(x) = 1 + x + x^2$. Avgör om $\{p, q, r\}$ är linjärt oberoende.