SF1624 Algebra och geometri
Föreläsning 12

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

25 november 2016

Tenta 11 januari kl 8.00-11.00

Anmäl er till tentan nu!

Basbyte, sammanfattning

Givet två baser för $\mathbf{R}^2$, $\mathcal{E} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ och $\mathcal{F} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}\}$.

Bilda matrisen P vars kolonner är $\mathcal{F}$-basvektorernas koordinater i basen $\mathcal{E}$.

Om $[\vec{v}]_{\mathcal{F}}$ är vektorn $\vec{v}$:s koordinater i basen $\mathcal{F}$ och $[\vec{v}]_{\mathcal{E}}$ samma vektors koordinater i basen $\mathcal{E}$ så gäller att

1. $P\,[\vec{v}]_{\mathcal{F}} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$

Dessutom. Om $A_{\mathcal{F}}$ är matrisen för en viss linjär avbildning relativt basen $\mathcal{F}$ och $A_{\mathcal{E}}$ matrisen för samma linjära avbildning relativt basen $\mathcal{E}$ så gäller att

2. $A_{\mathcal{F}} = P^{-1} A_{\mathcal{E}} P$

Koordinater för en vektor i olika baser, exempel:

Låt $\vec{f_1} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\vec{f_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Då är $\mathcal{F} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}\}$ en bas för $\mathbf{R}^2$.

Låt $\mathcal{E} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ vara standardbasen för $\mathbf{R}^2$.

Bilda matrisen $P = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Då gäller att

$$P \left[\vec{v}\right]_{\mathcal{F}} = \left[\vec{v}\right]_{\mathcal{E}}$$

Till exempel om $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ är koordinaterna för en vektor $\vec{v}$ i basen $\mathcal{F}$ så får vi koordinaterna för samma vektor $\vec{v}$ i basen $\mathcal{E}$ genom

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\vec{v}\right]_{\mathcal{E}}$$

Innan vi börjar

Matriser och basbyten:

Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som består i projektion på linjen $y = 2x$.

Låt $A_{\mathcal{E}}$ vara dess matris i standardbasen och $A_{\mathcal{F}}$ dess matris i basen $\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Med hjälp av projektionsformeln får man att $A_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix}$

Eftersom $\mathcal{F}$-basens första vektor är parallell med linjen och den andra är ortogonal mot linjen får vi att $A_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Med basbytesmatrisen $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ får vi (kontrollräkna) att

$$A_{\mathcal{F}} = P^{-1} A_{\mathcal{E}} P$$

Exempel i andra vektorrum än $\mathbf{R}^n$

1. Är $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ en bas för $\mathbf{M}(2,2)$?

2. Avgör om $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ligger i $\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

3. Är $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ en bas för $\mathbf{P}_2$? Ange i så fall koordinaterna för polynomet $p(x) = 2 - x^2$ i den basen.

4. Är $\mathcal{C} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ en bas för $\mathbf{P}_2$? Ange i så fall koordinaterna för polynomet $p(x) = 2 - x^2$ i den basen. Hur byter jag koordinater från $\mathcal{C}$ till $\mathcal{B}$?

Kursen hittills

Sammanfattning:

1. Vektorer (med skalärprodukt, kryssprodukt) och geometri (med linjer och plan).

2. Matriser och linjära avbildningar.

3. Gauss-Jordans metod, som är vår egen swiss army knife som löser alla problem

Innehåll:

1. Vektorer i $\mathbf{R}^n$
2. Skalärprodukt
3. Projektionsformeln
4. Ortogonalitet
5. Kryssprodukt
6. Trippelprodukt
7. Linjer och plan

Matriser och Linjära avbildningar

Innehåll:

1. Matriser, transponat, matrismultiplikation, invers
2. Linjära avbildningar mellan vektorrum
3. Sammansättning av avbildningar, invers
4. Nollrum och Bildrum

Innehåll:

1. Gauss-Jordans metod
2. Linjära ekvationssystem
3. Linjärt oberoende
4. Baser för delrum
5. Nollrum (ker) och Bildrum (Col)
6. De fyra fundamentala delrummen till en matris