SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 13

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

28 november 2016

Anmäl er till tentan nu!

(om ni inte redan har gjort det)

Determinanter av 2×2-matriser

Om $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ så definieras determinanten av A genom

$$\det A = ad - bc$$

Uppgift: Beräkna $\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

Determinanter av 2×2-matriser

Om $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ så definieras determinanten av A genom

$$\det A = ad - bc$$

Observation: $\det A$ är ett tal som säger något om matrisen A.

Fråga: Vilken information om matrisen A ger determinanten?

Determinanter

Determinanter av 2×2-matriser

Om $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ så definieras determinanten av A genom

$$\det A = ad - bc$$

1. Avbildningsskala: Om A är matrisen för en linjär avbildning så är (beloppet av) $\det A$ avbildningsskalan för denna linjära avbildning. Dvs den faktor med vilken alla områdens area förändras när man gör avbildningen.

Följd: $\det AB = \det A \det B$

Egenskaper hos determinanter av 2×2-matriser

Om $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ så definieras determinanten av A genom

$$\det A = ad - bc$$

2. Linjära ekvationssystem:

$A\vec{x} = \vec{b}$ har unik lösning för varje högerled $\vec{b}$

om och endast om $\det A \neq 0$

Egenskaper hos determinanter av 2×2-matriser

Om $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ så definieras determinanten av A genom

$$\det A = ad - bc$$

3. Homogena linjära ekvationssystem:

$A\vec{x} = \vec{0}$ har bara den triviala lösningen

om och endast om $\det A \neq 0$

Egenskaper hos determinanter av 2×2-matriser

Om $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ så definieras determinanten av A genom

$$\det A = ad - bc$$

4. Inverterbarhet:

A har invers

om och endast om $\det A \neq 0$

Egenskaper hos determinanter av 2×2-matriser

Om $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ så definieras determinanten av A genom

$$\det A = ad - bc$$

4. Rang:

A har full rang

om och endast om $\det A \neq 0$

Determinanter av 3×3-matriser

Om $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ så fås determinanten av A genom

$$\begin{aligned} \det A = & a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ & - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \\ & + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Uppgift: Beräkna $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Determinanter av 4×4-matriser

Om $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ så fås determinanten av A genom

$$\det A =$$

Determinanter finns bara av kvadratiska matriser!

$$n \times n$$

Egenskaper hos determinanter av $n \times n$-matriser

Om A är en $n \times n$-matris så gäller att

1. $\det A$ anger avbildningsskala
2. $\det A \neq 0$ är ekvivalent med att
   (i) $A\vec{x} = \vec{b}$ har unik lösning för varje högerled
   (ii) $A\vec{x} = \vec{0}$ har bara den triviala lösningen
   (iii) A har invers
   (iv) A har full rang.

För alla $n \times n$-matriser gäller att

$$\det AB = \det A \det B$$

och om A är inverterbar är $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$

Uppgifter:

Låt den linjära avbildningen T ges av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

1. Vilken area har bilden av enhetscirkeln under T?
2. Vilken rang har matrisen A ?
3. Hur många lösningar har $A\vec{x} = \vec{0}$?
4. Är A inverterbar?
5. Har avbildningen T en invers?

Uppgifter:

Låt den linjära avbildningen T ges av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

1. Vilken volym har bilden av enhetskuben under T?
2. Vilken rang har matrisen A ?
3. Hur många lösningar har $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -8 \\ 54 \end{bmatrix}$?
4. Är A inverterbar?
5. Har avbildningen T en invers?

Vi såg att det $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 15.$

Finns det flera sätt att räkna ut detta?

Hur förändrar radoperationer determinanten?