SF1624 Algebra och geometri
Föreläsning 14

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

30 november 2016

Determinanter forts, kap 5

1. Mer om determinanter
2. Alternativa beräkningsmetoder
3. Teori och tillämpningar

Egenskaper hos determinanter av $n \times n$-matriser

Om A är en $n \times n$-matris så gäller att

1. $\det A$ anger avbildningsskala
2. $\det A \neq 0$ är ekvivalent med att
   (i) $A\vec{x} = \vec{b}$ har unik lösning för varje högerled
   (ii) $A\vec{x} = \vec{0}$ har bara den triviala lösningen
   (iii) A har invers
   (iv) A har full rang.

Egenskaper hos determinanter av $n \times n$-matriser, forts

För alla $n \times n$-matriser gäller att

$$\det AB = \det A \det B$$

Det följer att om A är inverterbar så är

$$(\det A)(\det A^{-1}) = 1$$

Dessutom följer att

$$\det A = \det(P^{-1}AP)$$

om P är en inverterbar $n \times n$ -matris.

Determinanter av 2×2-matriser

Om $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ så definieras determinanten av A genom

$$\det A = ad - bc$$

Determinanter av $n \times n$ -matriser

För $n \geq 3$, om A är en $n \times n$-matris, låt $A(i,j)$ beteckna den $(n-1) \times (n-1)$-matris man får från A genom att stryka rad i och kolonn j i A.

Med beteckningar som ovan låt vidare kofaktorn C_{ij} till A definieras genom

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i,j)$$

Nu definierar vi determinanten av A genom

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

Determinanter av $n \times n$ -matriser

Sats. Determinanten fås även genom utveckling längs vilken annan rad som helst, eller längs vilken kolonn som helst.

Följdsats. Om någon rad eller kolonn i matrisen A består av bara 0:or, så är $\det A = 0$

Följdsats. Om matrisen A är triangulär så är $\det A =$ produkten av diagonalelementen.

Följdsats. $\det A^T = \det A$

Determinanter

Determinanter och radoperationer.

Om A är triangulär så är det $A =$ produkten av diagonalelementen.

Fråga: Kan man förenkla uträkningen av determinanten genom att Gaussa? Hur förändrar radoperationer determinanten?

Svar:

1. Att multiplicera en rad med ett tal r förändrar determinanten med en faktor r
2. Att byta plats på två rader gör att determinanten byter tecken
3. Att lägga en multipel av en rad till en annan rad förändrar inte determinanten

Uppgift:

1. Beräkna det $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ genom att använda radoperationer för att få matrisen triangulär. (Obs detta är inte det smartaste sättet för just denna matris)

2. Beräkna det $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 14 & 10 \end{bmatrix}$ genom att använda radoperationer för att få matrisen triangulär.

Facit: 15, 44

Uppgift

Beräkna dessa determinanter genom inspektion:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 14 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 17 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 91 \end{bmatrix} =$$

Alternativ definition av determinanten

Om $A = (a_{ij})_{n\times n}$ så är

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n}$$

där S_n är mängden av permutationer av n objekt och σ_j är objektet på plats j i permutationen σ.

Sarrus regel för 3×3 -determinanter:

Se wikipedia

Kofaktormatriser

Minns att kofaktorn C_{ij} till $n \times n$ -matrisen A definieras genom

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i,j)$$

där $A(i,j)$ betecknar den $(n-1) \times (n-1)$-matris man får från A genom att stryka rad i och kolonn j i A.

Kofaktormatrisen $\mathrm{cof}A$ till A är nu den $n \times n$ -matris vars element är kofaktorerna till A, dvs den matris som på rad i kolonn j har talet C_{ij}.

Exempel: Beräkna $\mathrm{cof}A$ om $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Kofaktormatriser

Detta ger oss ett nytt sätt att beräkna inversen till en $n \times n$ -matris (om den finns):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{cof} A)^T$$

Obs. För 2×2 -matriser betyder detta:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & b \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Cramers regel

Detta är ytterligare ett sätt att lösa kvadratiska linjära ekvationssystem där koefficientmatrisen är inverterbar.

Låt A vara en $n \times n$ -matris som är inverterbar. Då har $A\vec{x} = \vec{b}$ lösningen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \det N_1 \\ \det N_2 \\ \vdots \\ \det N_n \end{bmatrix}$$

där N_i är matrisen A med kolonn i utbytt mot högerledet $\vec{b}$.

Lös med Cramers regel (eller med någon annan metod)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

och

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Facit:

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uppgifter

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 19 & 5 & 0 \\ 11 & 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm rangen av A. Är A inverterbar?

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Beräkna volymen av bilden av enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ under den linjära avbildning som ges av A.

Uppgifter forts.

3. Är kolonnerna i matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ linjärt oberoende?