



Seminarium 5

Se www.kth.se/social/course/SF1626 för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

Detta seminarium inleds med en inlämning. Lös uppgifterna 1-4 nedan och skriv ner lösningarna med en lösning per blad. Skriv namn och personnummer på varje blad. När seminariet börjar får du veta vilken uppgift som ska lämnas in. Innan du börjar med seminarieuppgifterna ska du lösa de rekommenderade uppgifterna ur kursboken Calculus av Adams och Essex (8:e upplagan), nämligen:

Avsnitt	Rekommenderade uppgifter
15.1	3, 5, 17,
15.2	3, 5, 7, 21
15.3	7, 11
15.4	1, 5, 7, 15
15.5	1, 7, 13
15.6	5, 9, 13, 15

UPPGIFTER

Uppgift 1. Låt \mathbf{F} och \mathbf{G} vara vektorfälten som ges av

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) \quad \text{och} \quad \mathbf{G}(x, y) = (y^2, -x^2)$$

där $f(x, y) = x^4y^2 + xy$ för (x, y) i \mathbb{R}^2 . Låt C_1 vara kurvan som ges av den räta linjen från $(2, 4)$ till $(-1, 3)$ och låt C_2 vara den slutna kurva som ges av enhetscirkeln med medelpunkt i origo orienterad moturs.

- Beräkna kurvintegralen $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
- Beräkna kurvintegralen $\int_{C_1} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$.
- Beräkna kurvintegralen $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
- Beräkna kurvintegralen $\int_{C_2} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$.

Uppgift 2. Funktionen f ges av

$$f(x, y) = 2x + x^2 + 2y^2, \quad \text{för alla } (x, y) \text{ i } \mathbb{R}^2.$$

- (a) Bestäm ett vektorfält \mathbf{F} sådant att fältlinjerna till \mathbf{F} är nivåkurvor till f .
 (b) Finns det flera sådana vektorfält?

Uppgift 3. Låt \mathbf{F} vara vektorfältet som utanför origo ges av

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{ax + by}{x^2 + y^2}, \frac{cx + dy}{x^2 + y^2} \right),$$

och låt C vara den kurva som ges av

$$\mathbf{r}(t) = (1, 1) + e^{-t} (\cos t, \sin t),$$

för $t \geq 0$. Låt $D_1 = \{(x, y) : y > 0\}$ och $D_2 = \{(x, y) : y > -1\}$.

- (a) För vilka värden på konstanterna a, b, c och d är \mathbf{F} konservativt i området D_1 ?
 (b) För vilka värden på konstanterna a, b, c och d är \mathbf{F} konservativt i området D_2 ?
 (c) Använd potentialen till \mathbf{F} för att beräkna kurvintegralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

då $a = d = 1$ och $b = c = 0$.

För att beräkna kurvintegralen för en oändlig kurva går det att först begränsa till en ändlig del $0 \leq t \leq T$ och sedan beräkna gränsvärdet när $T \rightarrow \infty$.

Uppgift 4. Låt S vara den yta som i sfäriska koordinater¹ ges av

$$r = 3, \quad -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4.$$

Ytans orientering ges av att dess normalvektor pekar bort från origo.

- (a) Skissera ytan S och beräkna dess area.
 (b) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x^2, y^2, z^2)$ genom S .

¹I boken används R istället för r för avståndet till origo. Här skrivs de sfäriska koordinaterna som r, θ och ϕ där ϕ är vinkeln mot positiva z -axeln.