

SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 15

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

2 december 2016

Eigenvärden och egenvektorer, kap 6.1

- 1 Vad är det?
- 2 Hur räknar man ut det?
- 3 Vad ska man ha det till?

(... och se till att klara seminarium 5 på måndag!)

Varför egenvärden och egenvektorer?

Motiverande exempel.

1. I vilken bas är matrisen för en linjär avbildning enklast?

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{vs} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

2. Hur räknar man enklast ut A^{100} om A är en 3×3 -matris?

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{100} \quad \text{vs} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{100}$$

Trixet är: Byt till en bas av egenvektorer!

Definition

Låt $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ vara en linjär avbildning.

Om det finns en vektor \vec{v} (som INTE får vara $\vec{0}$) och ett tal λ (som FÅR vara 0) så att

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

så sägs λ vara ett egenvärde till avbildningen T och \vec{v} vara en egenvektor till T hörande till egenvärdet λ .

Eftersom linjära avbildningar ges av matriser kan vi göra motsvarande definition för $n \times n$ -matriser A , dvs $\vec{v} \neq \vec{0}$ är en egenvektor och λ ett egenvärde till A om

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

Lite arbete

1. Avgör om någon av vektorerna $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ är egenvektor till avbildningen T som ges av standardmatrisen $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$ och bestäm i så fall också egenvärdet.
2. Låt $S : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som består i projektion på linjen $y = x$. Har denna avbildning några egenvektorer? Vad är i så fall deras egenvärden?
3. Låt $R : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som består i rotation $\pi/2$ radianer moturs runt origo. Har denna avbildning några egenvektorer? Vad är i så fall deras egenvärden?

Hur hittar man egenvektorer och egenvärden?

Resonemang:

1. Givet matris A söks \vec{v} och λ så att

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

2. Samma ekvation kan skrivas så här:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

3. Homogent linjärt ekvationssystem! Icke-trivial lösning för \vec{v} när

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

4. Egenvärdena λ är alltså lösningar till $\det(A - \lambda I) = 0$. Dessa värden på λ kan sedan sättas in i ekvationssystemet $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ vars lösningar är egenvektorer.

(Obs att man måste lösa ett ekvationssystem per egenvärde.)

Hur hittar man egenvektorer och egenvärden?

Resonemang:

1. Givet matris A söks \vec{v} och λ så att

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

2. Samma ekvation kan skrivas så här:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

3. Homogent linjärt ekvationssystem! Icke-trivial lösning för \vec{v} när

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

4. Egenvärdena λ är alltså lösningar till $\det(A - \lambda I) = 0$. Dessa värden på λ kan sedan sättas in i ekvationssystemet $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ vars lösningar är egenvektorer.

(Obs att man måste lösa ett ekvationssystem per egenvärde.)

Dagens tentaproblem, 2015-03-13:

- (a). Vad menas med begreppet egenvektor?
- (b) Avgör vilka av vektorerna

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

som är egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

- (c) Bestäm egenvärden och tillhörande egenrum till matrisen A .

Hitta alla egenvärden och egenvektorer till matriserna:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -12 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 1 & 8 & -8 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Uppgifter/Exempel

1. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till den linjära avbildning $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ som speglar alla vektorer i y -axeln.
2. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till den linjära avbildning $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ som speglar alla vektorer i xy -planet.
3. Bestäm i valfri bas matrisen för den linjära avbildning som består i projektion av alla vektorer i \mathbf{R}^3 på planet med ekvation $x - 2y + 3z = 0$.

Diagonalisering av matriser

Givet en linjär avbildning $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ med standardmatris A . Anta att vi kan hitta en bas \mathcal{F} för \mathbf{R}^n som består uteslutande av egenvektorer till T . Bilda basbytesmatrisen P som har dessa egenvektors koordinater i standardbasen som kolonner. Då gäller att

$$D = P^{-1}AP$$

där D är den diagonalmatris som har egenvärdena på diagonalen och alla andra element 0. Denna diagonalmatris D är då matrisen för T i basen \mathcal{F} .

Omvänt gäller: Om vi kan diagonalisera matrisen A med hjälp av någon matris P så existerar det en bas för \mathbf{R}^n som bara består av egenvektorer till A

Diagonalisering av matriser, forts

Lite terminologi och observationer: Matriser A och B som är relaterade genom ett samband

$$B = P^{-1}AP$$

kallas similära matriser, skrivs $A \sim B$. Similära matriser har en del egenskaper gemensamma:

1. De har samma egenvärden
2. De har samma determinant
3. De har samma rang
4. De har samma spår (summan av diagonalelementen)

Diagonalisering av matriser, forts

Lite terminologi och observationer: Mer att ta upp kring egenvärden, egenvektorer och diagonalisering:

1. Egenrum hörande till egenvärden
2. Egenvärdens algebraiska resp geometriska multiplicitet
3. Egenvektorer till *olika* egenvärden är linjärt oberoende
4. $n \times n$ -matriser med n olika egenvärden är diagonaliserbara

Dagens tentaproblem 2, 2015-03-13:

Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

- (a) Bestäm alla egenvektorer till egenvärdena -1 och 2 .
- (b) Varför är matrisen A diagonaliserbar?