SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 16

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

5 december 2016

Egen-saker

Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering kap 6

1. Mer om egenvärden och egenvektorer
2. Diagonalisering av matriser
3. Exempel och tillämpningar

Hur hittar man egenvektorer och egenvärden?

Det här gjorde vi förra gången:

1. Egenvektorer och egenvärden till en kvadratisk matris A definieras genom ekvationen

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

2. Samma ekvation kan skrivas så här:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

3. Homogent linjärt ekvationssystem! Icke-trivial lösn för $\vec{v}$ när

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

4. Egenvärdena λ är alltså lösningar till $\det(A - \lambda I) = 0$. Dessa värden på λ kan sedan sättas in i ekvationssystemet $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ vars lösningar är egenvektorer.

(Obs att man måste lösa ett ekvationssystem per egenvärde.)

Exempel

Hitta alla egenvärden och egenvektorer till matrisen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Diagonalisera med hjälp av detta matrisen!

6,-1, (1,6),(1,-1)

Uppgift

Dagens tentaproblem, 2016-03-17:

Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm alla egenvektorer till egenvärdena -1 och 2.
(b) Varför är matrisen A diagonaliserbar?

Diagonalisering av matriser

Givet en linjär avbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ med standardmatris A. Anta att vi kan hitta en bas $\mathcal{F}$ för $\mathbf{R}^n$ som består uteslutande av egenvektorer till T. Bilda basbytesmatrisen P som har dessa egenvektorers koordinater i standardbasen som kolonner. Då gäller att

$$D = P^{-1}AP$$

där D är en diagonalmatris som har egenvärdena på diagonalen och alla andra element 0. Denna diagonalmatris D är då matrisen för T i basen $\mathcal{F}$.

Omvänt gäller: Om vi kan diagonalisera matrisen A med hjälp av någon matris P så existerar det en bas för $\mathbf{R}^n$ som bara består av egenvektorer till A

Diagonalisering av matriser, forts

Lite terminologi och observationer: Mer att ta upp kring egenvärden, egenvektorer och diagonalisering:

1. Mängden av egenvektorer hörande till ett och samma egenvärde bildar tillsammans med $\vec{0}$ ett delrum till $\mathbf{R}^n$, kallat egenrummet hörande till egenvärdet.
2. Att egenvärdenas algebraiska resp geometriska multiplicitet är lika är ekvivalent med att matrisen är diagonaliserbar.
3. Egenvektorer till *olika* egenvärden är linjärt oberoende.
4. $n \times n$ -matriser med n olika egenvärden är diagonaliserbara

Diagonalisering av matriser, forts

Lite terminologi och observationer: Matriser A och B som är relaterade genom ett samband

$$B = P^{-1}AP$$

kallas similära matriser, skrivs $A \sim B$. Similära matriser har en del egenskaper gemensamma:

1. De har samma determinant
2. De har samma rang
3. De har samma karaktäristiska ekvation, vilket betyder:
   a. De har samma egenvärden
   b. De har samma spår (summan av diagonalelementen)

Uppgift

Dagens tentaproblem, 2016-06-09:

Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A

(b) Beräkna $A^{11}\vec{v}$, där $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Uppgift

Tillämpning:

Matematiken bakom Googles algoritm page rank