KTH Datavetenskap
och kommunikation

DT1130 Spektrala transformer
Tentamen 150115

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift maximalt ger 4 p. Normalt gäller följande betygsgränser: **E: 9 p, D: 11.5 p, C: 14 p, B: 16 p, A: 18 p**
Tillåtna hjälpmedel: räknare, formelblad (bifogat)

Lycka till!

1

Betrakta den analoga signalen

$$x(t) = \cos(100\pi t)$$

a Vilken är den lägsta frekvens man kan sampla signalen med om man vill undvika vikning? *(1 p)*

b Med start vid $t = 0$ börjar man sampla signalen med $f_s = 200$ Hz. Skriv ett uttryck för den samplade signalen $x(n)$. *(1 p)*

c Som *b* ovan, men $f_s = 75$ Hz. *(1 p)*

d Ange en annan analog signal som skulle resultera i en samplad signal identisk med den i uppgift *c* (fortfarande med $f_s = 75$ Hz). *(1 p)*

2

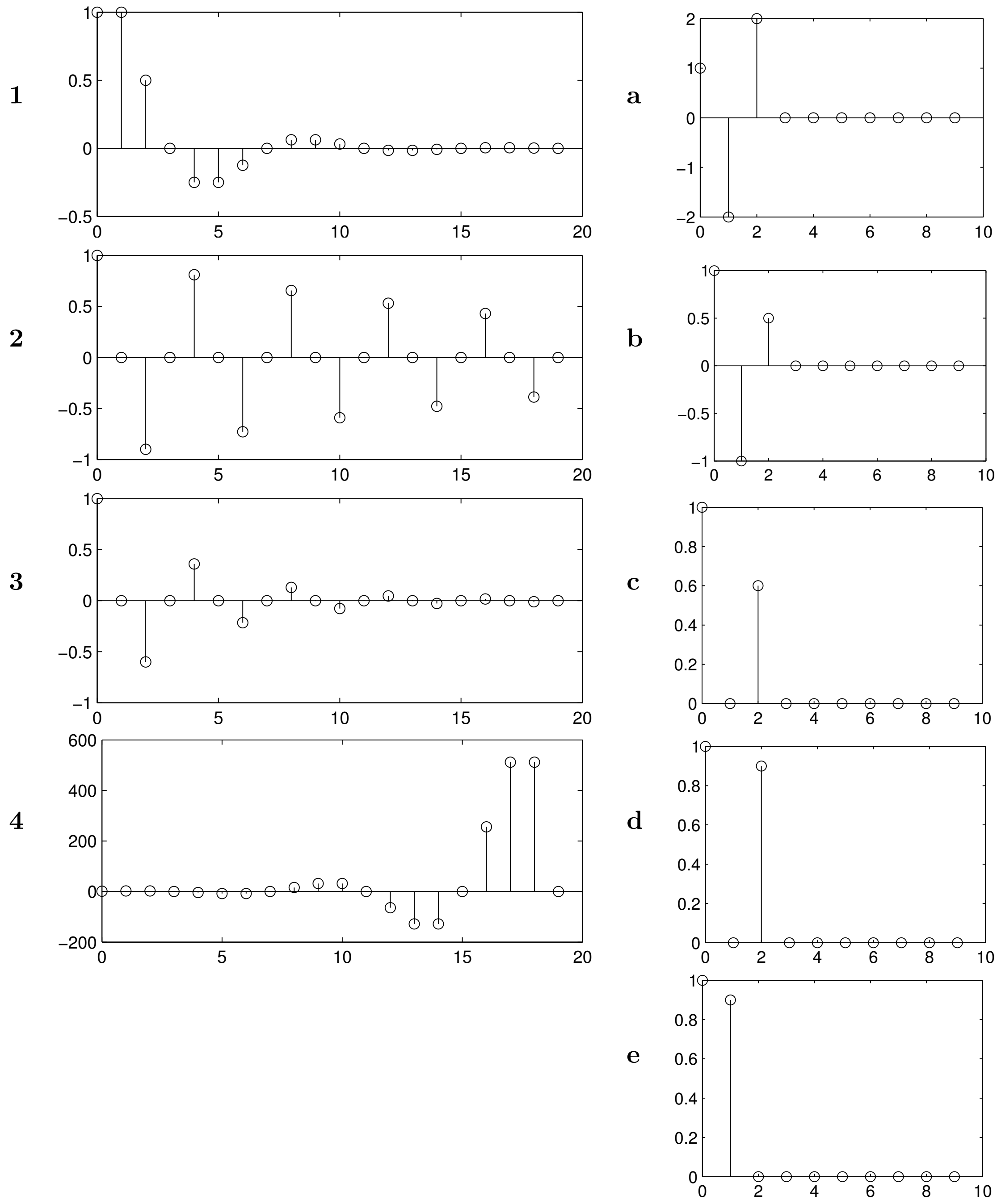
I figur 1 ser du impulssvar härrörande från ett antal olika filter. Varje impulssvar på vänster sida (*1-4*) kommer från ett filter som utgör *inversen* till ett av filtren på höger sida, och dessa ska paras ihop. (Inversen till ett filter med överföringsfunktion $H(z)$ är $\frac{1}{H(z)}$) *(1p/ korrekt par)*

3

Designa ett filter med följande egenskaper:

- förstärkning noll för $\omega = 0$
- förstärkning noll vid nykvistfrekvensen
- ett polar på imaginära axeln på avstånd r från origo
- förstärkning $\frac{100}{18}$ vid $\omega = \pi/2$
- filtret ska vara stabilt

Ta fram överföringsfunktion och differensekvation för filtret!



Figur 1. Ok, vilka impulssvar hör ihop?

4

En bild med storleken $M \times N$ pixlar ska filtreras med en kärna av storleken $K \times K$.

a Hur många multiplikationer krävs, om kärnan inte är linjärt separerbar? *(2 p)*

b Hur många multiplikationer krävs om kärnan *är* linjärt separerbar? *(2 p)*

5

Systemidentifikation kallas det när man studerar in- och utsignal till ett system och försöker bestämma systemets parametrar. Man kan likna det vid att man har en hemlig låda (systemet), och målet är att bestämma vad som finns i lådan (utan att öppna den alltså).

Ett system matas med en impuls, varpå följande utsignal erhålls:

$$x(n) = e^{-n/2} \sin(\frac{\pi}{4}n)u(n)$$

Bestäm överföringsfunktionen $H(z)$ för systemtet! (4 p)

Lösningar

1

a

$\cos(100\pi t) = \cos(2\pi f t)$ medför att $f = 50$ Hz. Enligt Nyqvistkriteriet måste signalen då samplas med $f_s \geq 100$ Hz.

b

För att får fram den samplade signalen substituerar vi $t = nT_s = \frac{n}{f_s}$. Detta ger

$$x(n) = \cos\frac{100\pi n}{200} = \cos\frac{\pi n}{2}$$

c

Som ovan: substituera $t = nT_s = \frac{n}{f_s}$. Detta ger

$$x(n) = \cos\frac{100\pi n}{75} = \cos\frac{4\pi n}{3}$$

men $\frac{4\pi}{3} > \pi$, dvs över nykvistfrekvensen. Vi får vikning vilket ger vinkelfrekvensen $2\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ vilket i sin tur ger

$$x(n) = \cos\frac{2\pi n}{3}$$

d

I uppgift c får vi en signal med vinkelfrekvensen $\frac{2\pi}{3}$ rad/sampel. Vid samplingsfrekvensen 75 Hz motsvaras det alltså av en tidskontinuerlig signal med vinkelfrekvensen $\frac{75\cdot 2\pi}{3} = 50\pi$ rad/sekund, som vi kan skriva som

$$x(t) = \cos\omega t = \cos(50\pi t)$$

2

Genom en snabb okulär besiktning av graferna kan man sluta sig till att impulssvaren till vänster kommer från återkopplade filter eftersom de inte tar slut, och det verkar likaså troligt att impulssvaren till höger kommer från filter utan återkoppling eftersom de alla endast har 2 eller 3 värden skiljda från noll.

För ett filter utan återkoppling gäller att

$$h(n) = b_n$$

Vi kan således avläsa filterkoefficienterna för filtren till höger och direkt skriva upp deras överföringsfunktioner, som vi sedan kan invertera för att få överföringsfunktioner som ska passa in på impulssvaren till vänster.

a

$h(n) = [1, -2, 2]$ ger att

$$H(z) = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}$$

Inversen blir

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 2z + 2}$$

Polerna (sätt nämnaren = 0 och lös ut med pq-formeln) blir:

$$p = 1 \pm j$$

Polerna ligger utanför enhetscirkeln och vi söker således ett instabilt filter med växande impulssvar. Det måste vara **4**.

b

Samma metod som ovan ger oss $h(n) = [1, -1, 0.5]$ samt $H(z) = 1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}$. Inversen blir $H(z) = \frac{z^2}{z^2 - z + 0.5}$ vilket ger poler i

$$p = \frac{1 \pm j}{2}$$

Här ska vi alltså ha en dämpad svängning med frekvensen $\pi/4$ rad/sampel = 8 sampels/period, vilket endast stämmer på impulssvar **1**.

c

$h(n) = [1, 0, 0.6]$, $H(z) = 1 + 0.6z{-}2$ med inversen $H(z) = \frac{z^2}{z^2+0.6}$
Poler:

$$p = \pm\sqrt{.6}j$$

Poler på imagänära axeln innanför enhetscirklen motsvarar en dämpad svängning med frekvensen $\pi/2$ (4 sampels/period) vilket kan vara **2** eller **3**.

d

$h(n) = [1, 0, 0.9]$, $H(z) = 1 + 0.9z{-}2$ med inversen $H(z) = \frac{z^2}{z^2+0.9}$
Poler:

$$p = \pm\sqrt{.9}j$$

Poler på imagänära axeln innanför enhetscirklen motsvarar en dämpad svängning med frekvensen $\pi/2$ (4 sampels/period) vilket kan vara **2** eller **3**. Polerna ligger dock närmare enhetscirkeln än i alternativ c vilket innebär långsammare avklingning (mindre dämpning) för detta filter. Alltså är det impulssvar **2** som hör ihop med d (och följatligen **3** som hör ihop med c).

5.1 e

Vi har hittat alla par, men vi kollar ändå:

$h(n) = [1, 0.9]$ och $H(z) = 1 + 0.9z^{-1}$. Inversen är $H(z) = \frac{z}{z+0.9}$ vilket ger en pol

$$p = -0.9$$

Detta motsvara en dämpad svängning vid nyqvistfrekvensen, dvs 2 sampel/period. Inget sådant impulssvar finns till vänster.

Sammanfattningsvis: *1-b, 2-d, 3-c, 4-a.*

3

De två första kriterierna anger att vi ska ha nollställen vid $\omega = 0$ och $\omega = \pi$, dvs $z = 1$ och $z = -1$. Det åstadkoms med täljaren

$$(z-1)(z+1) = z^2 - 1$$

Nollställe på imaginära axeln på avstånd r från får vi med nämnaren

$$(z - rj)(z + rj) = z^2 + r^2$$

Tillsammans ger det överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + r^2}$$

Det fjärde kriteriet anger förstärkningen vid $\omega = \pi/2$, vilket motsvarar $z = j$. Vi sätter in det i överföringsfunktionen och tar beloppet:

$$|H(z = j)| = |\frac{j^2 - 1}{j^2 + r^2}| = \frac{|-2|}{|-1 + r^2|} = \frac{2}{|r^2 - 1|} = \frac{100}{18}$$

$$|r^2 - 1| = \frac{36}{100} = 0.36$$

$$r^2 - 1 = \pm\frac{36}{100} = 0.36$$

Kriterium 5 är att filtret ska vara stabilt, alltså är $r < 1$ vilket betyder att

$$r^2 = 1 - 0.36 = 0.64$$

och $r = \pm\sqrt{0.64}$. Men r är ett avstånd och således positivt alltså

$$r = 0.8$$

.

Insatt i överföringsfunktionen ovan får vi

$$H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 0.64}$$

vilket motsvarar filterekvationen

$$y(n) = x(n) - x(n-2) - 0.64y(n-2)$$

4

a

Filtrering av en bild betyder faltning i två dimensioner. I praktiken innebär det att *varje* pixel den resulterande bilden är ett resultat av lika många multiplikationer som det finns element i kärnan. Om vi väljer att göra faltningen så att resultatet får samma dimensioner som den ursprungliga bilden (dvs det som motsvarar matlab-kommandot `conv(A,B,'same')` i matlab), alltså $N \times M$ och kärnan har storleken $K \times K$ så innebär detta att det totala antalet multiplikationer blir

$$K^2NM$$

b

När kärnan är linjärt separerbar betyder det att vi kan göra faltningen först i en riktningen och sedan i den andra. I detta fall är kärnan en matris $1 \times K$ (för horisontell filtrering) och $K \times 1$ (för vertikal filtrering). Varje pixel blir alltså resultatet av K multiplikationer i varje riktning, dvs vi får enligt samma resonemang som ovan

$$2KNM$$

.

5

Vi har ett impulssvar och söker överföringsfunktionen. Vi använder Z-transformen. Steg 1 är då att skriva impulssvaret på en form som vi kan översätta till Z-domänen med hjälp av formelsamlingen. Vi använder Euler:

$$x(n) = e^{-n/2}\sin(\frac{n\pi}{4})u(n) = e^{-n/2}\frac{e^{jn\pi/4} - e^{-jn\pi/4}}{2j}u(n)$$

$$= \frac{u(n)}{2j}e^{(-1/2+j\pi/4)n} - \frac{u(n)}{2j}e^{(-1/2-j\pi/4)n}$$

Vi har nu två termer som kan Z-transformeras med transform 4 i f.s. ($a^n u(n)$). I den första termen blir $a = e^{-1/2+j\pi/4}$ och i den andra blir $a = e^{-1/2-j\pi/4}$.

Z-transformering ger

$$X(z) = \frac{1}{2j}\frac{1}{1 - e^{-1/2+j\pi/4}z{-1}} - \frac{1}{2j}\frac{1}{1 - e^{-1/2-j\pi/4}z^{-1}}$$

sätt på gemensamt bråkstreck:

$$X(z) = \frac{1}{2j}\frac{z(z - e^{1/2-j\pi/4}) - z(z - e^{-1/2+j\pi/4})}{(z - e^{-1/2+j\pi/4})(z - e^{-1/2-j\pi/4})}$$

förenkla:

$$X(z) = \frac{1}{2j}\frac{ze^{-1/2}(e^{j\pi/4} - e^{-j\pi/4})}{z^2 - ze^{-1/2}(e^{j\pi/4} + e^{-j\pi/4}) + e^{-1}}$$

$$= \frac{ze^{-1/2}\sin(\pi/4)}{z^2 - ze^{-1/2}2\cos(\pi/4) + e^{-1}} = \frac{ze^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{2}}}{z^2 - ze^{-1/2}\sqrt{2} + e^{-1}}$$

vilket är den sökta överföringsfunktionen.