SF1624 Algebra och geometri
Föreläsning 17

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

7 december 2016

Dagens teman från kap 7

1. Ortogonala baser
2. Ortonormala baser
3. Gram-Schmidts metod
4. Ortogonala matriser

(På fredag: minstakvadratmetoden)

Inledande exempel om ortonormala baser

Om $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ är standardbasen för $\mathbf{R}^3$ och $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ är någon vektor, beräkna

$$\vec{x} \cdot \vec{e}_1, \quad \vec{x} \cdot \vec{e}_2, \quad \vec{x} \cdot \vec{e}_3.$$

Ortogonala vektorer

Definition ortogonal:

En mängd vektorer, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ är **ortogonal** om alla skalärprodukter $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ när $i \neq j$.

Definition ortonormal:

En mängd vektorer, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ är **ortonormal** om den är ortogonal och alla $\vec{v}_i$ har längd 1.

Observation:

Varje ortogonal mängd nollskilda vektorer är linjärt oberoende.

Exempel:

1. Avgör om mängden $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$ är ortogonal.

2. Kan man skala om vektorerna i B så att man får en mängd B' som är ortonormal?

Koordinater i en ON-bas

Sats om koordinater i en ortonormal bas (ON-bas):

Om $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ är en ortonormal bas (ON-bas) för $\mathbf{R}^n$ och $\vec{x}$ är en vektor i $\mathbf{R}^n$ så kan $\vec{x}$ skrivas:

$$\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{x} \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 + \cdots + (\vec{x} \cdot \vec{v}_n)\vec{v}_n$$

dvs den i:te koordinaten för $\vec{x}$ är $\vec{x} \cdot \vec{v}_i$.

Exempel/övning:

1. Kontrollera att mängden $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$

är en ON-bas för $\mathbf{R}^3$

2. Bestäm koordinaterna för vektorn $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ i basen B.

Ortogonala matriser

Definition av ortogonala matriser:

En $n \times n$ -matris P sådan att $P^T P = I$ sägs vara en **ortogonal matris.**

Med andra ord: För en ortogonal matris P gäller att $P^T = P^{-1}$.

Ortogonala matriser

Sats om ortogonala matriser:

Följande villkor är ekvivalenta för en n $n \times n$ -matris P:

1. P är ortogonal, dvs $P^T P = I$
2. P:s kolonner utgör en ortonormal mängd vektorer
3. P:s rader utgör en ortonormal mängd vektorer

Exempel/Övning:

Bestäm inversen till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Definition av ortogonalt komplement

Låt S vara ett delrum av $\mathbf{R}^n$. Vi säger att en vektor $\vec{v}$ är ortogonal mot S om

$$\vec{v} \cdot \vec{s} = 0, \qquad \text{för alla } \vec{s} \in S$$

Mängden av alla vektorer som är ortogonala mot S kallas för ortogonala komplementet till S och skrivs $S^\perp$. Detta $S^\perp$ är ett delrum till $\mathbf{R}^n$.

Observation: Om $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ är en bas för S så är

$$S^\perp = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n : \vec{x} \cdot \vec{v}_j = 0 \text{ för } 1 \leq j \leq k\}$$

Exempel/Övning

Vi är i $\mathbf{R}^4$. Låt S =Span$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Bestäm $S^\perp$

En sats

Sats

Låt S vara ett k-dimensionellt delrum av $\mathbf{R}^n$. Då gäller att

1. $S \cap S^\perp = \{\vec{0}\}$
2. $\dim S^\perp = n - k$
3. Om $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}\}$ är en ortonormal bas för S och $\{\vec{v_{k+1}}, \dots, \vec{v_n}\}$ är en ortonormal bas för $S^\perp$ så är $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}, \vec{v_{k+1}}, \dots, \vec{v_n}\}$ en ortonormal bas för $\mathbf{R}^n$.

Definition av projektion på delrum

Låt S vara ett k-dimensionellt delrum av $\mathbf{R}^n$ och låt $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}\}$ vara en ortonormal bas för S. Projektionen av en vektor $\vec{x}$ i $\mathbf{R}^n$ på S definieras genom

$$\text{proj}_S\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{v_1})\vec{v_1} + (\vec{x} \cdot \vec{v_2})\vec{v_2} + \cdots + (\vec{x} \cdot \vec{v_k})\vec{v_k}$$

Vi har också projektionen perpendikulärt mot S:

$$\text{perp}_S\vec{x} = \vec{x} - \text{proj}_S\vec{x}$$

Projektion på delrum

Approximationssatsen

Låt S vara ett delrum av $\mathbf{R}^n$. För alla $\vec{x}$ i $\mathbf{R}^n$ så är $\text{proj}_S\vec{x}$ den unika vektor i S som minimerar avståndet till $\vec{x}$.

Gram-Schmidts metod

Gram-Schmidts metod är en metod att utifrån en bas, vilken som helst, skapa en ortogonal bas (som sedan förstås också kan skalas till en ortonormal bas)

Givet alltså en bas $B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k\}$ för S.

Steg 1. Sätt $\vec{v}_1 = \vec{w}_1$

Steg 2. Sätt $\vec{v}_2 = \vec{w}_2 - \dfrac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1$

Steg 3. Sätt $\vec{v}_3 = \vec{w}_3 - \dfrac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 - \dfrac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2$

Och så vidare! Efter k steg har vi en ortogonal bas $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ för S som kan skalas om till en ortonormal bas.

Exempel/Övning

Finn en ortonormal bas för $S = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$