SF1624 Algebra och geometri
Föreläsning 18

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

9 december 2016

Dagens meny

1. Exempel på Gram-Schmidts metod (kap 7.2)
2. Minstakvadrat-metoden (kap 7.3)
3. Några gamla tentauppgifter (kap 6)

Gram-Schmidts metod är en metod att utifrån en bas, vilken som helst, skapa en ortogonal bas (som sedan förstås också kan skalas till en ortonormal bas)

Givet alltså en bas $B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$ för S.

Steg 1. Sätt $\vec{v}_1 = \vec{w}_1$

Steg 2. Sätt $\vec{v}_2 = \vec{w}_2 - \dfrac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1$

Steg 3. Sätt $\vec{v}_3 = \vec{w}_3 - \dfrac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 - \dfrac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2$

Och så vidare! Efter k steg har vi en ortogonal bas $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ för S som kan skalas om så den blir ortonormal.

Exempel/Övning

Finn en ortonormal bas för $S = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

Minstakvadrat-metoden

Approximativ lösning av överbestämda linjära ekvationssystem. Detta är minstakvadrat-metoden:

Anta att vi vill lösa det linjära ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ men lösning saknas.

Då löser vi istället ekvationssystemet $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$ och säger att lösningen vi får till detta system är en approximativ lösning till det ursprungliga systemet, eller en minstakvadratlösning.

Bild på tavlan. Exempel i filmen.

Exempel

Finn den andragradskurva $y = a + bx + cx^2$ som i minstakvadratmening bäst ansluter till följande mätdata: (x,y)=(-1,1), (0,1), (1,2), (2,4)

Uppgift 2, 2016-06-09

Klimatstatistik visar att vintermedeltemperaturen i Stockholm förändrats så här:

Period 0 (1961-1970)	$-5°$C
Period 1 (1971-1980)	$-2°$C
Period 2 (1981-1990)	$-3°$C
Period 3 (1991-2000)	$-1°$C
Period 4 (2001-2010)	$-1°$C

Bestäm den funktion på formen $T(k) = Ak + B$ som i minstakvadratmening bäst stämmer med dessa värden. Här är k nummer av perioden och $T(k)$ medeltemperatur i period k.

Uppgift 4, 2016-06-09

Låt U vara lösningsmängden i $\mathbf{R}^3$ till ekvationen $2x + y = 0$.

Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 115 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm en ortonormal bas β till U
(b) Utvidga basen till en ortonormal bas för $\mathbf{R}^3$
(c) Bestäm vektorn $\text{proj}_U(\vec{v})$.

Uppgift 5, 2016-03-17

Vi har följande fyra vektorer i $\mathbf{R}^4$:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Låt V vara vektorrummet Span$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.
(a) Visa att $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ är en ortogonal bas för V.
(b) Vi har basen $\gamma = \{\vec{v}, \vec{w}\}$ för V. Bestäm koordinatvektorn för $\text{proj}_V(\vec{x})$ i basen γ.

Fourierserier