SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 19

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

12 december 2016

Dagens ämnen:

1. Symmetriska matriser, kap 8.1
2. Diagonalisering av kvadratiska former, kap 8.2
3. Andragradskurvor och andragradsytor, kap 8.3
4. Utblick: Fourierserier

Resten av veckan kommer vi i huvudsak att fokusera på det som är centralt i kursen. Hur tänker man? Hur skriver man? Vad är det man verkligen måste kunna? Exempel från gamla tentor.

Symmetriska matriser

Definition:

Symmetriska matriser är matriser som är sina egna konjugat, dvs kvadratiska matriser A sådana att $A^T = A$.

Exempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 95 & 9 \\ 3 & 9 & 87 \end{bmatrix}$

Vilka av dessa matriser är symmetriska

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 27 & -3 \\ 72 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 95 & 3 \\ 3 & 3 & 97 \\ 3 & 97 & 87 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 95 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 97 & 87 \\ 4 & 5 & 87 & 0 \end{bmatrix}$$

Symmetriska matriser

Symmetriska matriser har dessa egenskaper:

1. Alla egenvärden o egenvektorer är reella
2. Egenvektorer till olika egenvärden är ortogonala
3. Det finns en bas av egenvektorer till matrisen
4. Symmetriska matriser kan alltid diagonaliseras
5. Diagonaliseringen kan ske: $D = P^T AP$ (dvs P ON)

Symmetriska matriser

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 95 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 97 & 87 \\ 4 & 5 & 87 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 95 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 97 & 87 \\ 4 & 5 & 87 & 0 \end{bmatrix}$$

Vilka av dessa frågor kan du svara på (utan att räkna) för de båda matriserna? Ge svaren!

1. Hur många olika egenvärden har matriserna?
2. Hur många linjärt oberoende egenvektorer har matriserna?
3. Finns det en bas för $\mathbf{R}^4$ som bara består av egenvektorer?
4. Kan matriserna diagonaliseras?

Exempel / Övning

Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Motivera varför dessa matriser kan diagonaliseras ortogonalt och gör det!

Kvadratiska former, 2 variabler

En kvadratisk form Q i två variabler är något som kan skrivas

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

Fråga: Är Q positiv för alla $x_1, x_2 \neq 0$? Negativ? Varken eller?

1. Om $Q(x_1, x_2) > 0$ för alla $x_1, x_2 \neq 0$ sägs Q vara positivt definit.

2. Om $Q(x_1, x_2) < 0$ för alla $x_1, x_2 \neq 0$ sägs Q vara negativt definit.

3. Om $Q(x_1, x_2) > 0$ för vissa $x_1, x_2 \neq 0$ och < 0 för andra, sägs Q vara indefinit.

4. Om de stränga olikheterna i 1 eller 2 byts mot $\geq$ resp $\leq$ sägs Q vara positivt eller negativt semidefinit.

Diagonalisering av kvadratiska former

Med hjälp av en symmetrisk matris kan vi skriva

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Om vi byter bas så att matrisen diagonaliseras får vi

$$\begin{bmatrix} x_1' & x_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2$$

i de nya variablerna x_1' och x_2'. Nu kan vi se att svaret på frågan beror på tecknet av egenvärena till matrisen.

1. Alla egenvärden positiva betyder att Q är positivt definit.
2. Alla egenvärden negativa betyder att Q är negativt definit.
3. Att egenvärdena har olika tecken betyder att Q indefinit.

Diagonalisering av kvadratiska former

En kvadratisk form Q i tre variabler är något som kan skrivas

$$Q(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx_1x_2 + 2fx_1x_3 + 2gx_2x_3$$

vilket kan skrivas med en symmetrisk matris:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & f \\ d & b & g \\ f & g & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Diagonalisera och få

$$\begin{bmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'$$

1. Alla egenvärden positiva betyder att Q är positivt definit.
2. Alla egenvärden negativa betyder att Q är negativt definit.
3. Att egenvärdena har olika tecken betyder att Q indefinit.

Exempel / Övning:

Klassificera de kvadratiska formerna

$$Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_2x_3.$$

Diagonalisering av kvadratiska former

Andragradskurvor: Ellipser, hyperbler, ...

Vilken slags kurva motsvarar ekvationerna?

1. $3y^2 + 4xy = 16$
2. $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 14$

Andragradsytor: Ellipsoider, hyperboloider, ...

Vilken slags yta motsvarar ekvationen?

$$4x^2 + y^2 + z^2 - 4yz = 1$$

(Tabeller för den intresserade i kap 8.3)

Fourierserier