Institutionen för Matematik

SF1624
Algebra och Geometri
Läsåret 2016/2017

En liten orientering om Fourierserier

Den vanliga skalärprodukten i $\mathbf{R}^3$ definieras genom

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

och visas sedan ha följande egenskaper för alla $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ och skalärer k :

(a) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0,$ med likhet om och endast om $\vec{u} = \vec{0}$ (positivt definit)
(b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symmetrisk)
(c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
(d) $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}$

Punkterna (c) och (d) säger att skalärprodukten är linjär i andra argumentet, vilket eftersom den är symmetrisk också betyder att den är linjär i första argumentet. Detta kallas att den är bilinjär.

Skalärprodukten är alltså en positivt definit, symmetrisk bilinjär form.

Säg nu att vi vill ha en skalärprodukt i vektorrummet av kontinuerliga funktioner på något intervall $[a, b]$. Vi kan inte använda definitionen från $\mathbf{R}^3$, så vad ska vi göra? Jo, vi härmar egenskaperna ovan och säger att en skalärprodukt (eller inre produkt, som det egentligen heter i allmänna vektorrum) är en positivt definit, symmetrisk bilinjär form. Vi kan till exempel ta som inre produkt en integral:

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)\, dx$$

Det är lätt att kolla att egenskaperna (a)-(d) är uppfyllda för denna inre produkt.

Frågan är nu om vi kan skriva våra funktioner med hjälp av någon slags basfunktioner, ungefär som vi gjorde i $\mathbf{R}^3$ med vektorer. Här är ett sånt exempel:

Anta att vi studerar funktioner på intervallet $[-\pi, \pi]$. Genom att räkna ut ett antal integraler kan vi konstatera att mängden av funktioner

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots$$

är en ortogonal mängd funktioner på vårt intervall. Den inre produkten av två olika funktioner i mängden blir ju alltid 0. Det visar sig att vi kan använda denna mängd funktioner som ett slags oändlig bas för vektorrummet av kontinuerliga funktioner.

Givet en sådan funktion f kan vi bilda Fourierserien till f:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

där Fourier-koefficienterna a_n och b_n är givna av:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Fourierserien är en oändlig serie av funktioner och konvergensen av en sådan serie är förstås något som behöver analyseras noga, men i princip fungerar det så här. Kolla gärna i kapitel 7.5 i boken och jämför Fourierserien med projektionsformeln på delrum i $\mathbf{R}^n$ som ges i kapitel 7.2.