KTH, Matematik
Maria Saprykina

Lösningsförslag till tentamen i SF1629, Diff och Trans II (del 1)
19 dec 2016

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–28 poäng, B–24, C–21, D–17, E–14, Fx–13.
Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina (masha@kth.se).
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

1. Differentialekvationen $xy' - y = x^2$, $x > 0$, har en lösning som också uppfyller ekvationen $x^3y' - x^2y = y^2$, $x > 0$. Bestäm denna lösning.

Lösning: Den första ekvationen är linjär av första ordningen. Man kan lösa den, tex, mha integrerande faktor. Man får den allmänna lösningen $y(x) = Cx + x^2$, där $C \in \mathbb{R}$.

Vi sätter in den allmänna lösningen i den andra ekvationen och bestämmer konstanten. Man får $C = 0$. Svar: $y(x) = x^2$.

2. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x > 0.$$

Lösning: Ekvationen är linjär inhomogen. Först löser vi den motsvarande homogena ekvationen $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$ och får $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ där $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$.

Vi kan söka en partikulär lösning på formen $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ (variation av parametrar). Vi vet att vi får en lösning om vi väljer u_i, $i = 1, 2$ som uppfyller

$$u_1' = -\frac{y_2(x)g(x)}{W(x)} = -1, \quad u_2' = \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)} = \frac{1}{x},$$

where $g(x) = \frac{e^x}{x}$, $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, and $W(x)$ is Wronski-determinanten. Funktioner $u_1 = -1$, $u_2 = \ln x$ uppfyller ekvationerna ovan. Således, $y_p(x) = -xe^x + xe^x \ln x$ är en partikulär lösning till den inhomogena ekvationen.

Den allmänna lösningen till den ursprungliga ekvationen är alltså $y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + xe^x \ln x$.

En annan metod som skulle kunna tillämpas är reduktion av ordningen.

3. Betrakta systemet

$$x_1' = x_1 - 5x_2$$
$$x_2' = x_1 - x_2.$$

a) Bestäm en fundamentalmatris till systemet. **(2p)**
b) Lös systemet under begynnelsevillkoret $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$. **(1p)**

c) Är den kritiska punkten $(0, 0)$ stabil eller instabil? **(1p)**

Lösning: a). Om vi låter

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ och } A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

så kan systemet skrivas $X' = AX$. Matrisen A har egenvärdena $\lambda = \pm 2i$. Vidare, $\overline{v} = \binom{5}{1-2i}$ är en (komplex) egenvektor svarande mot egenvärdet $\lambda = 2i$. Alltså vet vet vi att

$$X = \overline{v}e^{2it} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{2it}$$

är en komplex lösning. Vidare vet vi att real- och imaginärdelen av denna lösning är två reella och linjärt oberoende lösningar. Vi har

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{2it} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-2i \end{pmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t) = \begin{pmatrix} 5\cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 5\sin 2t \\ \sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Således,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 5\cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 5\sin 2t \\ \sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix}$$

är två linjärt oberoende (reella) lösningar. Detta betyder att

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) & X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos 2t & 5\sin 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t & \sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix}$$

är en fundamentalmatris till systemet.

b) Eftersom X_1 och X_2 är linjärt oberoende så kan den allmänna lösningen till systemet kan skrivas

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 = c_1 \begin{pmatrix} 5\cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5\sin 2t \\ \sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Begynnelsevillkoret ger

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X(0) = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Detta ger att $c_1 = 1/5$ och $c_2 = 1/10$. Således är

$$X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5\cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5\sin 2t \\ \sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t + \frac{\sin 2t}{2} \\ \frac{\sin 2t}{2} \end{pmatrix}.$$

den sökta lösningen.

c) Eftersom systemet är linjärt, och matrisen A har rent imaginära egenvärden, så vet vi att origo är ett centrum, dvs $(0, 0)$ är stabil (men inte asymptotiskt stabil). Detta ser vi också från formen på den allmänna lösningen i b) ovan; samtliga lösningar är periodiska, och ju mindre $|c_1|, |c_2|$, desto närmare origo rör sig $(x_1(t), x_2(t))$.

4. Betrakta ekvationen $2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$.

a). Visa att denna ekvation har en reguljär singulär punkt i $x = 0$. **1p.**

Lösning: Skriver om ekvationen på standard form: $y'' + \frac{3}{2x}y' + \frac{2x^2-1}{2x^2}y = 0$. Vi ser att $x = 0$ är en singulär punkt eftersom koefficienterna inte är analytiska i 0. Vidare, alla ekvationens koefficienter är polynom, och både $\lim_{x\to 0} x\frac{3}{2x}$ och $\lim_{x\to 0} x^2\frac{2x^2-1}{2x^2}$ är ändliga. Därför är $x = 0$ en reguljär singulär punkt.

b). Bestäm indexekvationen (indicial equation) samt rekursionsrelationen. **2p.**

Lösning: Vi söker lösningarna på formen $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ där $a_0 \neq 0$. Om man deriverar ansatsen termvis och sätter in i ekvationen, får man följande. För $n = 0$ får man $(2r^2+r-1)a_0 = 0$. Eftersom $a_0 \neq 0$, får vi indexekvationen:

$$2r^2 + r - 1 = 0,$$

vilket ger $r = 1/2$ eller $r = -1$.

För $n = 1$ får man $(2r^2 + 5r + 2)a_1 = 0$. För värden av r som ovan får vi $a_1 = 0$.

För $n \geq 2$ får man rekurrensrelationen:

$$a_n(n + r + 1)(2n + 2r - 1) + 2a_{n-2} = 0.$$

c). Bestäm de tre första nollskilda termerna i serielösningen motsvarande den största roten av indexekvationen och $a_0 = 1$. **1p.**

Låt $a_0 = 1$, $r = 1/2$. Vi har fått $a_1 = 0$. Då $a_2 = -2a_0/(r + 3)(2r + 3) = -1/7$ $a_3 = 0$, $a_4 = -2a_2/(r + 5)(2r + 7) = 1/(2 \cdot 7 \cdot 11)$.

De första 3 termerna av y_1 är

$$x^{1/2}(1 - \frac{x^2}{7} + \frac{x^4}{2 \cdot 7 \cdot 11}).$$

Lösning:

5. Ett visst filter av typen

$$y_{ut}(t) = \int_0^t h(t-u)y_{in}(u)du,$$

där h är en viss funktion, transformerar insignalen $y_{in}(t) = \cos t$ till utsignalen $y_{ut}(t) = 1 - \cos t$. Beräkna $y_{ut}(t)$ om $y_{in}(t) = e^{-t}$.

Lösning: Vi noterar att $y_{ut}(t)$ har form av faltning $h * y_{in}(t)$. Laplacetransformen $Y_{ut}(s)$ av $y_{ut}(t)$ uppfyller

$$Y_{ut}(s) = H(s)Y_{in}(s)$$

(där H och Y_{in} står för Laplacetransformer av h och y_{ut}). Om $y_{in}(t) = \cos t$, får vi:

$$Y_{ut}(s) = \mathcal{L}\{1 - \cos t\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = H(s)\frac{s}{s^2+1},$$

vilket ger $H(s) = \frac{1}{s^2}$, och $h(t) = t$.

Om vi tar $y_{in}(t) = e^{-t}$, så $Y_{in}(s) = \frac{1}{s+1}$, och

$$Y_{ut} = H(s)Y_{in}(s) = \frac{1}{s^2}\frac{1}{s+1},$$

vilket ger $y_{ut} = t - 1 + e^{-t}$.

6. I denna uppgift är a) och b) oberoende av varandra.
a) Betrakta det autonoma systemet **(2p)**

$$\begin{aligned} x' &= 1 - y \\ y' &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Bestäm samtliga kritiska punkter, samt avgör om de är stabila eller instabila.

b) Genom att skiva om ekvationen $x'' + 2x^3 = 0$ som ett första ordningens autonomt system, använd lämplig metod för att avgöra om den kritiska punkten $(0, 0)$ är stabil eller instabil. **(2p)**

Lösning: a). De kritiska punkterna ges av

$$\begin{aligned} 1 - y &= 0 \\ x^2 - y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Första ekvationen ger $y = 1$. Insatt i den andra ekvationen fås $x^2 - 1 = 0$ vilket ger $x = \pm 1$. Alltså, $(\pm 1, 1)$ är de två kritiska punkterna.

Vi undersöker stabiliteten hos dessa punkter med hjälp av linjarisering. Systemet ger oss Jacobianen

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2x & -2y \end{pmatrix}.$$

I den kritiska punkten $(1, 1)$ har vi

$$J(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

som har egenvärdena $\lambda = -1 \pm i$. Eftersom realdelen är negativ så följer att den kritiska punkten $(1, 1)$ är stabil.

I den kritiska punkten $(-1, 1)$ har vi

$$J(-1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

som har egenvärdena $\lambda = -1 \pm \sqrt{3}$. Eftersom $\sqrt{3} - 1 > 0$ följer det att den kritiska punkten $(-1, 1)$ är instabil.

b) Om vi låter $y = x'$ kan ekvationen skrivas $y' + 2x^3 = 0$, dvs $y' = -2x^3$. Vi får alltså systemet

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -2x^3. \end{aligned}$$

Linjarsering ger ingen information om stabiliteten i detta fall. Vi använder fasplanmetoden. Vi får

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^3}{y}$$

vilket kan skrivas $ydy = -2x^3dx$. Integrering ger $y^2/2 = -x^4/2 + C$, dvs $x^4 + y^2 = 2C$ där C är en konstant. För varje val av $C > 0$ är detta slutna kurvor centrerade kring origo (och ju mindre $C > 0$, desto närmare origo är kurvan). Vi vet att lösningarna till systemet kommer att ligga på dessa kurvor. Således är $(0, 0)$ ett centrum, dvs $(0, 0)$ är en stabil kritisk punkt.

7. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Fullständig motivering krävs! Varje korrekt delsvar ger 1p.

a). Om $\sin x$ är en lösning till ekvationen

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

där a och b är reella konstanter, så är $\sin x + \cos x$ också en lösning.

Lösning: Sant. Ekvationen är linjär med reella konstanta koefficienter. Om $\sin x$ är en lösning, så måste både i och $-i$ vara rötter till den karakteristiska ekvationen. Detta innebär att $\cos x$ också är en lösning. Svaret följer av lineariteten.

b). Låt $f(t)$ och $g(t)$ vara kontinuerliga funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$, och g inte är identiskt lika med 0. Om $y_1(t)$ och $y_2(t)$ är lösningar till ekvationen

$$y'(t) = f(t)y(t) + g(t),$$

så även $y_1(t) + 2y_2(t)$ är en lösning till samma ekvation.

Lösning: Falskt. Om $y_1(t)$ och $y_2(t)$ är lösningar till ekvationen, så $y_i'(t) = f(t)y_i(t) + g(t)$ för $i = 1, 2$. Låt $y(t) = y_1(t) + 2y_2(t)$. Då $y' = (y_1 + 2y_2)' = y_1' + 2y_2' = f(t)y_1 + 2f(t)y_2 + 3g(t) = f(t)y + 3g(t) \neq f(t)y + g(t)$ eftersom g inte är identiskt lika med 0.

c). Laplace-transformen av funktionen $f(t) = ae^{2t} + be^{t^2}$ är definierad för alla reella a och b.

Lösning: Falskt. Laplace-transformen av $f(t)$ är definierad om och endast om $b = 0$, eftersom $\mathcal{L}\{e^{t^2}\} = \int_0^\infty e^{t^2}e^{-st}dt$, vilket divergerar för varje fixerat s.

d). Låt $f(t)$ och $g(t)$ vara kontinuerliga funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Funktionen $y(t) = t^3$ kan inte vara lösning till ekvationen

$$y''(t) + f(t)y'(t) + g(t)y(t) = 0.$$

Lösning: Sant. Enligt existens- och entydighetssatsen för linjära ekvationer (vilken kan tillämpas eftersom $f(t)$ och $g(t)$ är kontinuerliga), har ekvationen en unik lösning som uppfyller $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. En sådan lösning är $y(t) = 0$ för alla t. Funktionen $y(t) = t^3$ har också $y(0) = y'(0) = 0$, så den kan inte vara lösning.

8. Låt y_1, y_2 vara två linjärt oberoende lösningar till ekvationen

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad x \in I. \tag{1}$$

a) Visa att **(3p)**

$$P(x) = -\frac{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}{W(y_1, y_2)}$$
$$Q(x) = \frac{y_1' y_2'' - y_2' y_1''}{W(y_1, y_2)}$$

där $W(y_1, y_2)$ är Wronskideterminanten av y_1 och y_2.
b) Bestäm en ekvation på formen (1) som har $y_1 = x$ och $y_2 = x^3$ som lösningar då $x > 0$. **(1p)**

Lösning: a) Att y_1 och y_2 är lösningar betyder att vi har

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$$
$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

Vi betraktar detta (för fixerat x) som ett linjärt ekvationssystem, där $P(x)$ och $Q(x)$ är de obekanta. Eftersom det är givet att y_1 och y_2 är linjärt oberoende så vet vi att Wronskideterminanten $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$ på I. Om vi nu multiplicerar första ekvationen med y_2 och den andra med $-y_1$, och adderar ekvationerna fås

$$0 = y_1'' y_2 + P(x)y_1' y_2 - y_2'' y_1 - P(x)y_2' y_1$$

vilket ger

$$P(x) = \frac{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}{y_1' y_2 - y_2' y_1}.$$

Vi noterar att nämnaren är $-W(y_1, y_2)$, så vi kan allstå skriva

$$P(x) = -\frac{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}{W(y_1, y_2)}.$$

På samma sätt, genom att multiplicera första ekvationen med y_2' och den andra med $-y_1'$, och addera ekvationerna får vi

$$0 = y_1'' y_2' + Q(x)y_1 y_2' - y_2'' y_1' - Q(x)y_2 y_1'$$

vilket ger

$$Q(x) = \frac{y_1' y_2'' - y_2' y_1''}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} = \frac{y_1' y_2'' - y_2' y_1''}{W(y_1, y_2)}.$$

b) Vi bestämmer P och Q genom att använda formlerna från a), med $y_1 = x$ och $y_2 = x^3$. Vi har $W(y_1, y_2) = x(3x^2) - x^3(1) = 2x^3 \neq 0$ för $x > 0$, så

$$P(x) = -\frac{x \cdot 6x}{2x^3} = -\frac{3}{x}$$
$$Q(x) = \frac{1 \cdot 6x}{2x^3} = \frac{3}{x^2}.$$

Alltså, vi får ekvationen

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 0.$$