

REGLERTEKNIK, KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000

Tentamen 2016–12–21, kl 8:00 – 13:00

Hjälpmedel: Kursboken i Reglerteknik AK
(Glad, Ljung: Reglerteknik eller motsvarande),
räknetabeller, formelsamlingar och räknedosa.
Observera att slides av föreläsningar och övningsmaterial
(övningsuppgifter, ex-tentor och lösningar) INTE är tillåtna hjälpmedel.

Observandum: Behandla inte mer än en uppgift per blad.
Varje steg i lösningen skall motiveras.
Bristfällig motivering kan ge poängavdrag.
Skriv svar (med enhet i förekommande fall).
Skriv namn och personnummer på varje inlämnat ark.
Skriv endast på en sida per ark.
Fyll i antalet inlämnade ark på omslaget.

Tentamen består av fem uppgifter, som vardera bedöms med 10 poäng.
Poängsättningen för deluppgifter har markerats.

Betygsgränser: betyg Fx: ≥ 21
betyg E: ≥ 23
betyg D: ≥ 28
betyg C: ≥ 33
betyg B: ≥ 38
betyg A: ≥ 43

Ansvarig: Bo Wahlberg 08 790 72 42

Resultat: Anslås på
<https://www.kth.se/student/minasidor/>
senast 2017-01-20.

Lycka till!

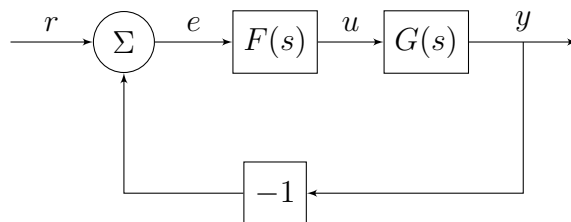
1. (a) Betrakta det återkopplade systemet i Figur 1 och låt

$$F(s) = 1, \quad G(s) = \frac{1}{s}.$$

Bestäm reglerfelet $e(t) = r(t) - y(t)$ för alla $t \geq 0$ vid en enhetsramp i referenssignalen,

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}.$$

(3p)



Figur 1: Blockdiagram för det återkopplade systemet för Uppgift 1a).

- (b) Ett system är givet på tillståndsform enligt:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

där $x(0) = 0$ och insignalen är

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}.$$

Vad är gränsvärdet av utsignalen $y(t)$ då $t \rightarrow \infty$.

(3p)

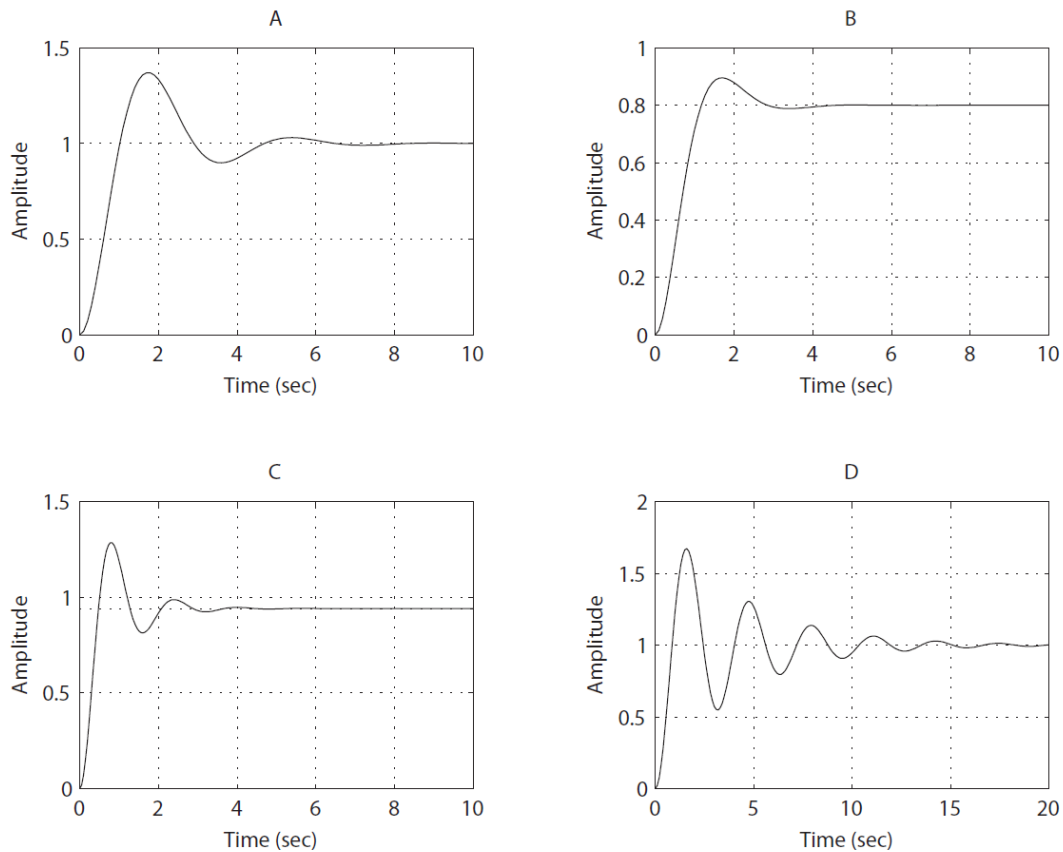
(c) Ett system av andra ordningen skall regleras med en PI-regulator

$$F(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$

Man prövar följande fyra inställningar

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1} : K = 1, T_I = \infty & \mathbf{2} : K = 1, T_I = 1 \\ \mathbf{3} : K = 1, T_I = 0.5 & \mathbf{4} : K = 4, T_I = \infty \end{array}$$

I Figur 2 visas fyra kvalitativa stegsvar från en enhetssteg i referenssignalen $r(t)$. Notera att skalorna på axlarna varierar mellan de olika figurerna. Para ihop respektive regulatorinställning med stegsvar. Motivera noga ditt svar! (4p)



Figur 2: Stegsvär för uppgift 1c)

2. (a) Uppgiften är att stabilisera det instabila systemet

$$G(s) = \frac{3}{(s+7)(s-a)}, \quad a > 0$$

med hjälp av en PD-regulator

$$F(s) = K(1 + T_D s)$$

- (i) Antag att $a = 3$ och bestäm en PD-regulator så det återkopplade systemet har en dubbelpol i -8 (3p)
- (ii) Vi är inte helt säkra på värdet av parametern a . För vilka värden på a är det slutna systemet med regulatorn från Uppgift 2a-i) asymptotisktstabil? (2p)

- (b) Betrakta nu systemet

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

med

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (i) Bestäm systemets poler. (1p)
- (ii) Visa att systemet inte är styrbart. (2p)
- (iii) Konstruera en tillståndsåterkoppling

$$u(t) = -Lx(t)$$

som placerar polerna i b och -3 . Vilka värden på b är möjliga att välja? (2p)

3. En vanlig överföringsfunktion inom processindustri är

$$G(s) = \frac{K_1}{1 + T_1 s} e^{-T_2 s}, \quad K_1, T_1, T_2 \geq 0$$

- (a) Antag att man med hjälp av enkla stegsvarsförsök fått fram följande skattningar av de obekanta parametrarna i modellen ovan:

$$K_1 = 2, \quad T_1 = 60, \quad T_2 = 30$$

Detta ger överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{2}{1 + 60s} e^{-30s}$$

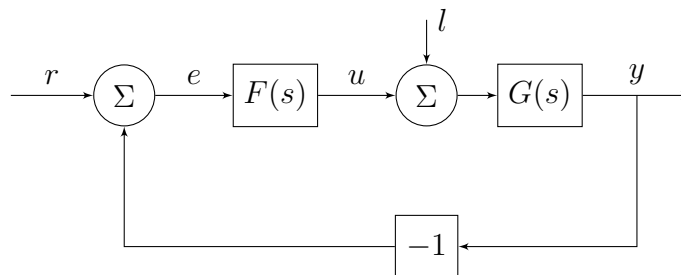
Bestäm med hjälp av lead-lag design en regulator $F(s)$ så att:

- $G_o(s) = F(s)G(s)$ har skärfrekvens 0.04 rad/s
- $G_o(s) = F(s)G(s)$ har lika stor fasmarginal som $G_o(s) = G(s)$
- Inget stationärt fel vid en konstant referenssignal.

(7p)

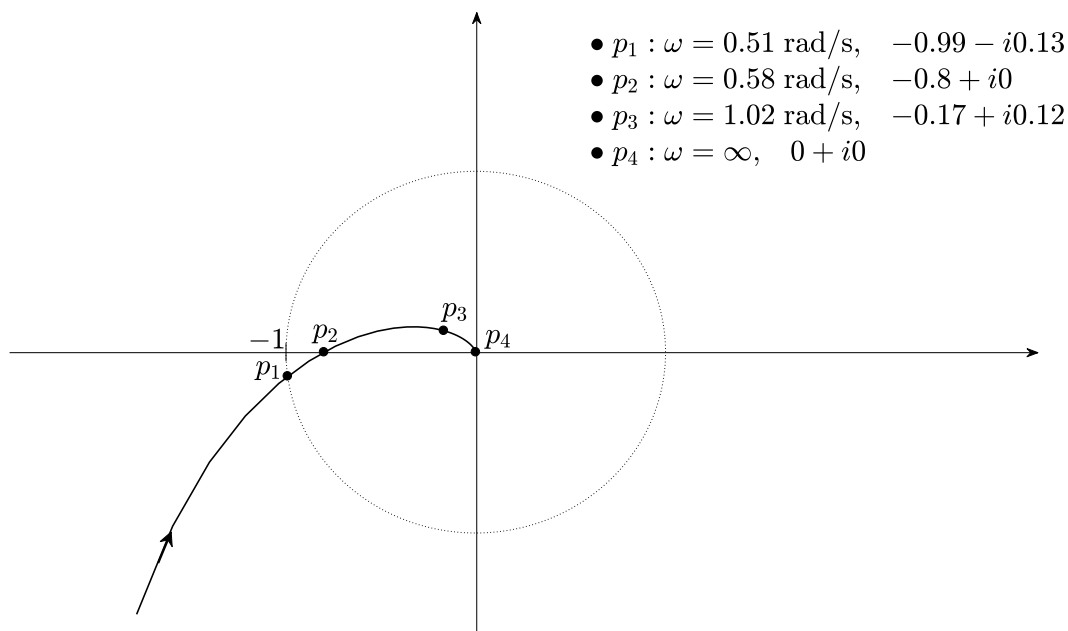
- (b) Antag att värdet av tidsfördröjningen T_2 är osäker. Hur stor kan T_2 vara innan det återkopplade systemet framräknat i Uppgift 3a) blir instabilt? (3p)

4. Studera det återkopplade systemet i Figur 3. Överföringsfunktionen $G(s)$ för systemet



Figur 3: Blockdiagram för det återkopplade systemet för Uppgift 4.

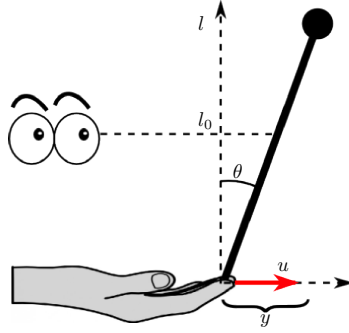
innehåller en ren integration (en pol i $s = 0$), men inga poler strikt i höger halvplan. Nyquistkurvan för $G_o(s) = G(s)$ är återgiven i Figur 4. Frekvenssvaret $G(i\omega)$ för fyra markerade frekvenser är givna i Figur 4.



Figur 4: Nyquistkurva för öppna systemet $G_o(s)$ när $F(s) = 1$.

- (a) Antag att man önskar öka det återkopplade systemets snabbhet med hjälp av en P-regulator $F(s) = K$. Hur stort värde på $K \geq 0$ kan man välja innan det återkopplade systemet blir instabilt? (2p)
- (b) Vi planerar att rita en rotort, dvs polerna till slutna systemet som funktion av förstärkningen $F(s) = K$. För vilket värde på $K \geq 0$ och ω kommer rotorten att skära imaginära axeln ($s = i\omega$)? (4p)
- (c) Låt $F(s) = 1$ och anta att insignalstörningen $l(t) = \sin(1.02t)$ påverkar systemet enligt Figur 3. Antag dessutom att referenssignalen $r = 0$. Bestäm utsignalen $y(t)$ för det återkopplade systemet efter det att transienterna har dött ut. (4p)

5. Antag att du försöker balansera en inverterad pendel genom att föra din hand fram och tillbaka som illustrerat i Figur 5.



Figur 5: En inverterad pendel som regleras av en hand.

En linjäriserad överföringsfunktion från hastigheten u vid fästet till positionsfelet y ges av:

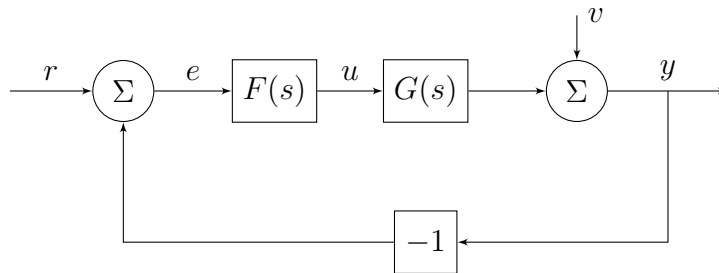
$$G(s) = \frac{(l - l_0)s^2 - g}{s^2(Mls^2 - (M + m)g)},$$

där l är pendelns längd, l_0 är höjden som du tittar på, M är massan för handen och m är massan för pendeln.

Under antagandet att $l_0 < l$ ges polerna och nollställena till $G(s)$ av:

$$\begin{array}{ll} \text{Poler} & p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = \sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}, \quad p_4 = -\sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}} \\ \text{Nollställena} & z_1 = \sqrt{\frac{g}{l-l_0}}, \quad z_2 = -\sqrt{\frac{g}{l-l_0}} \end{array}$$

Du återkopplar avståndet i framåtled med en regulator $F(s)$, som själv har stabila poler och nollställena, enligt Figur 6. Motsvarande återkopplade system antas vara stabilt.



Figur 6: Blockdiagram för den inverterade pendeln $G(s)$ återkopplat med regulatorn $F(s)$.

- (a) Låt $S(s)$ vara känslighetsfunktionen för det återkopplade systemet. Bestäm de instabila (strikt i höger halvplan) nollställena till $S(s)$? (2p)

- (b) Bodes integral (Resultat 6.1, sidan 124 i kursboken) ger att

$$\int_0^\infty \log |S(i\omega)| d\omega = \pi(p_1 + \cdots + p_m)$$

Bestäm värdet av högerledet för den återkopplade inverterade pendeln. (1p)

- (c) Följande resultat för den återkopplade inverterade pendeln kan härledas ur en mer allmän variant av Bodes integralsats

$$\int_{-\infty}^\infty \log |S(i\omega)| \frac{z_1}{z_1^2 + \omega^2} d\omega = \pi \log \left| \frac{z_1 + p_3}{z_1 - p_3} \right|.$$

Visa att detta resultat medför Bodes integral enligt Uppgift 5b). (7p)

Ledning:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = 2.$$