

Preliminära Lösningar Reglerteknik AK Tentamen 2016–12–21

Uppgift 1a

$$G_c(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow E(s) = \frac{s}{s+1}R(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s}$$

Svar: $e(t) = 1 - e^{-t}$

Uppgift 1b

Polerna till slutna systemet ges av $\det[sI - A] = s^2 + 3s - 3$. Detta medför att det återkopplade systemet är instabilt och att

Svar: $|y(t)| \rightarrow \infty$ då $t \rightarrow \infty$.

Uppgift 1c

Stegsvar B och C har stationära fel, dvs inget I-del ($T_I = \infty$). Stegsvaret C är snabbare och har mindre slutfel än B, dvs har en högre förstärkning K . Stegsvaret A och D har inget stationärt fel, dvs motsvarande regulator har en I-del. Stegsvaret D mer odämpat än A, dvs har minst integrationstid T_I (eftersom båda PI regulatorerna har samma förstärkning).

Svar: Stegsvaret A = Regulator 2, Stegsvaret B = Regulator 1, Stegsvaret C = Regulator 4 och Stegsvaret D = Regulator 3,

Uppgift 2a-i

Polerna till det slutna systemet ges av $(s+7)(s-a) + 3K(1+T_Ds) = s^2 + (7-a+3KT_D)s + 3K-7a$ vilket skall vara lika med $(s+8)^2 = s^2 + 16s + 64$. För $a=3$ innebär detta att

Svar: $K = 85/3$ och $T_D = 12/85$.

Uppgift 2a-ii

För ett allmänt a och regulatorn enligt Uppgift 2a-i) ges polerna av $s^2 + (7-a+12)s + 85-7a$. För stabilitet krävs positiva koefficienter dvs $a < 19$ och $a < 85/7 \approx 12.1$.

Svar: $a < 85/7$

Uppgift 2b-i

Svar: Dubbelpol i -1

Uppgift 2b-ii

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

har determinant lika med noll (rang 1), dvs är inte styrbart

Uppgift 2b-ii

Vi beräknar $L = [l_1 \ l_2]$ så att egenvärdena hos matrisen $A - BL$ hamnar i $-3, b$. Vi får

$$A - BL = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3l_1 & -3l_2 \\ -l_1 & -1 - l_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(sI - (A - BL)) = (s + 1)(s + 1 + 3l_1 + l_2) = 0$$

dvs vi får alltid en pol i -1 (beror på att systemet inte är styrbart). Detta ger att vi måste välja $b = -1$ och $1 + 3l_1 + l_2 = 3$.

En möjlig lösning är $l_1 = 0$ och $l_2 = 2$, men det räcker att uppfylla $l_2 = 2 - 3l_1$

Svar: $b = 1$, $u(t) = -2x_2(t)$

Uppgift 3a

Vi följer lead-lag algoritmen stegvis.

1. Nuvarande skärfrekvens:

$$1 = |G(i\omega_c)| = \left| \frac{K_1}{1 + T_1(i\omega_c)} \right| = \frac{K_1}{\sqrt{1 + T_1^2\omega_c^2}} \Rightarrow$$
$$\omega_c = \frac{\sqrt{K_1^2 - 1}}{T_1}.$$

Numeriskt har vi $\omega_c \approx 0.0289$.

2. Önskad skärfrekvens: $\omega_{cd} = 0.04$.

3. Nuvarande fasmarginal:

$$\begin{aligned} \phi_m &= \arg G(i\omega_c) - (-180^\circ) \\ &= \arg \frac{K_1}{1 + T_1 i\omega_c} e^{-T_2 i\omega_c} + 180^\circ \\ &= \arg K_1 - \arg(1 + T_1 \omega_c i) + \arg e^{-T_2 \omega_c i} + 180^\circ \\ &= 0^\circ - \arctan\left(\frac{T_1 \omega_c}{1}\right) - T_2 \omega_c + 180^\circ \\ &= 180^\circ - \arctan(T_1 \omega_c) - T_2 \omega_c. \end{aligned}$$

Numeriskt har vi att $\phi_m \approx 70.3826^\circ$.

4. Hur mycket måste vi fasöka vid ω_{cd} för att ha samma fasmarginal som innan? (Kom ihåg att ta hänsyn till lag-länken som kommer sänka fasen med 5.7° enligt tumregel.)

$$\begin{aligned}\phi_m &= [\arg G(i\omega_{cd}) - 5.7^\circ + \Delta\phi] - (-180^\circ) \\ &= 180^\circ - 5.7^\circ + \Delta\phi - \arctan(T_1\omega_{cd}) - T_2\omega_{cd} \implies \\ \Delta\phi &= \phi_m - 180^\circ + 5.7^\circ + \arctan(T_1\omega_{cd}) + T_2\omega_{cd}\end{aligned}$$

Numeriskt har vi att $\Delta\phi \approx 32.2176^\circ$.

5. Bestäm β så att vi får denna fasökning av lead-länken enligt Figur 5.13 i boken, eller formel (5.4):

$$\beta = \frac{1 - \sin \Delta\phi}{1 + \sin \Delta\phi} \approx 0.30.$$

6. Välj τ_D så att den maximala fasavanceringen sker vid vår önskade skärfrekvens:

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_{cd}\sqrt{\beta}} \approx 45.3.$$

7. Välj förstärkningen K så att vi får önskad skärfrekvens i systemet. Använd att vi valt $\tau_D = \frac{1}{\omega_{cd}\sqrt{\beta}} \Leftrightarrow \omega_{cd} = \frac{1}{\tau_D\sqrt{\beta}}$, samt formel (5.6) i boken:

$$1 = |F_{\text{lead}}(i\omega_{cd})G(i\omega_{cd})| = \left| F_{\text{lead}}\left(i\frac{1}{\tau_D\sqrt{\beta}}\right) \right| |G(i\omega_{cd})| \stackrel{(5.6)}{=} \frac{K}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{K_1}{\sqrt{1 + T_1^2\omega_{cd}^2}},$$

som ger att

$$K = \sqrt{\beta} \cdot \frac{\sqrt{1 + T_1^2\omega_{cd}^2}}{K_1}.$$

Numeriskt ger detta att $K \approx 0.7174$.

8. Välj τ_I enligt tumregel:

$$\tau_I = \frac{10}{\omega_{cd}} = 250.$$

9. Här krävs $\gamma = 0$ eftersom systemet själv inte innehåller en integrator.

Svar:

$$F(s) = 0.72 \frac{45.3s + 1}{13.8s + 1} \frac{250s + 1}{250s}$$

.

Uppgift 3b

Låt $T_2 = 30 + \Delta T_2$. Då sänkts fasmarginalen med $\omega_{cd}\Delta T_2 \leq 70\pi/180$ rad, dvs $\Delta T_2 \leq 70\pi/180/0.04 = 31$ s.

Svar: $T_2 \leq 61$ s.

Uppgift 4a

Från den givna Nyquistkurvan erhålls

- Skärfrekvens $\omega_c = 0.51$ rad/s;
- $\omega_p = 0.58$ rad/s;
- Fasmarginal $\varphi_m = \arctan(\frac{0.13}{0.99}) = 7.48^\circ$;
- Amplitudmarginal $A_m = \frac{1}{0.8} = 1.25$.

Svar: $K < A_m = 1.25$

Uppgift 4b

Låt $G(s) = Q(s)/P(s)$. I rotorsanalysen söker K och ω så att

$$P(i\omega) + KQ(i\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(i\omega)(1 + KG(i\omega)) = 0$$

Här har vi två lösningar $K = A_m = 1.25$ och $\omega = \omega_p = 0.58$ rad/s. Eftersom $G(s)$ innehåller en pol i $s = 0$ så får vi dessutom en lösning med $K = 0$ (startpunkt)

Svar: $K = 1.25$, $\omega = 0.58$ rad/s och $K = 0$, $\omega = 0$ rad/s.

Uppgift 4b

Överföringsfunktionen från $l(t)$ till $y(t)$ ges av

$$G_{ly}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

Eftersom $l(t) = \sin(1.02t) \Rightarrow$

$$y(t) = |G_{ly}(i1.02)| \sin(1.02t + \arg G_{ly}(i1.02)) + \text{transient}$$

Nu är $F(s) = 1$ och $G(1.02i) = G(i\omega_3) = -0.17 + i0.12$ enligt Nyquistkurvan.

$$|G_{ly}(i1.02)| = \frac{|-0.17 + i0.12|}{|0.83 + i0.12|} = 0.25$$

$$\arg G_{ly}(i1.02) = \arg(-0.17 + i0.12) - \arg(0.83 + i0.12) = 0.47 \text{ rad}$$

Svar: Stationärt gäller $y(t) = 0.25 \sin(1.02t + 0.47)$, dvs störningen undertrycks med en faktor 0.25

Uppgift 5a

Från blockdiagramet fås att:

$$\begin{aligned} S(s) &= \frac{1}{1 + G(s)F(s)} = \frac{P_G(s)P_F(s)}{P_G(s)P_F(s) + Q_G(s)Q_F(s)}, \\ G(s) &= \frac{Q_G(s)}{P_G(s)}, \quad F(s) = \frac{Q_F(s)}{P_F(s)} \end{aligned}$$

Notera att $S(s)$ har samma instabila nollställen som $G(s)$ eftersom regulatorn $F(s)$ bara har stabila nollställen (antagande) och $P_G(s)P_F(s) + Q_G(s)Q_F(s)$ har alla rötter i vänster halvplan (stabilit).

Svar: Instabilit nollställe i $p_3 = \sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}$ (har även två nollställen i $s = 0$).

Uppgift 5b

I bodes integralsats så är p_1 till p_m instabila polerna. Observera att poler i $s = 0$ inte ger något bidrag i denna summa.

Svar:

$$\int_0^\infty \log |S(i\omega)| d\omega = \pi p_3 = \pi \sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}$$

Uppgift 5c

Ledningen ger

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xp \ln \left| \frac{p + xp}{p - xp} \right| = 2p.$$

Multiplicera båda sidorna med $z_1 \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^\infty \log |S(i\omega)| \frac{z_1^2}{z_1^2 + \omega^2} d\omega = \pi z_1 \log \left| \frac{z_1 + p_3}{z_1 - p_3} \right|.$$

och låt z_1 gå mot oändligheten $\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^\infty \log |S(i\omega)| d\omega = \pi 2p_3.$$

Nu är $\log |S(i\omega)|$ en jämn funktion, vilket ger

$$\int_0^\infty \log |S(i\omega)| d\omega = \pi p_3 = \pi \sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}$$

vilket skulle visas.