Institutionen för matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Tisdagen den 10 januari 2017

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. En partikel rör sig så att positionen efter starten ges av
$$(x, y, z) = (t\cos t, t\sin t, t)$$
där enheten på axlarna är meter och där t är tiden mätt i sekunder.
   (a) Vilken hastighet har partikeln efter 1 sekund? **(1 p)**
   (b) Vilken fart har partikeln efter 1 sekund? **(1 p)**
   (c) Hur lång är den kurva partikeln har följt under den första sekunden? **(2 p)**

2. Undersök om fältet $\mathbf{F}(x, y) = (\sin x \sin y, -\cos x \cos y)$ är konservativt och beräkna sedan integralen
$$\int_C \sin x \sin y\, dx - \cos x \cos y\, dy$$
längs kurvan C som ges av $y = x^2$ från $(0, 0)$ till $(1, 1)$. **(4 p)**

3. Betrakta funktionen $f(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 + y^4$.
   (a) Visa att $(0, 0)$, $(3, -3)$ och $(3, 3)$ är de enda kritiska punkterna. **(1 p)**
   (b) Bestäm Taylorutvecklingen till andra ordningen kring den kritiska punkten $(3, -3)$ och använd detta för att avgöra om den utgör ett lokalt minimum, ett lokalt maximum eller om den är en sadelpunkt. **(2 p)**
   (c) Förklara varför det inte går att använda Taylorutvecklingen av andra ordningen kring origo för att avgöra om origo är en lokal extrempunkt eller en sadelpunkt. **(1 p)**

Del B

4. Låt D vara området i planet som beskrivs av olikheterna
$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{och} \quad x \leq |y|.$$
Bestäm masscentrum av området D. **(4 p)**

5. *De hyperboliska koordinaterna* i planet är definierade genom
$$(u, v) = \phi(x, y) = \left(\ln \sqrt{\frac{x}{y}}, \sqrt{xy}\right) \quad \text{för } x,\ y > 0.$$
   (a) Beräkna Jacobimatrisen till ϕ. **(2 p)**
   (b) Använd linjär approximation för att hitta det ungefärliga värdet av $\phi(1{,}01,\ 0{,}99)$. **(2 p)**

6. I en del av ett visst fiskevatten visar det sig att fiskarna alltid simmar enligt ett bestämt flöde, som kan beskrivas av vektorfältet
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (1, -2xy, 2xz) \quad \text{[kilogram fisk per minut och areaenhet]},$$
där x och y är geografiska koordinater och $z \leq 0$ djupet.
   (a) Ange de ekvationer med vilka flödeslinjerna till fältet kan bestämmas. **(1 p)**
   (b) Ett plant kvadratiskt nät kan antingen sättas upp mellan punkterna
$$A: \quad (0,0,0),\ (0,1,0),\ (0,1,-1),\ (0,0,-1),$$
eller
$$B: \quad (0,1,0),\ (1,1,0),\ (1,1,-1),\ (0,1,-1).$$
Vilket alternativ bör väljas för maximal fångst och hur mycket fisk fångas då i nätet om det får hänga uppe i 5 timmar? **(3 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Låt funktionen f vara given av

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

med definitionsmängd

$$\mathcal{D}(f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 1 \text{ och } x^2 + y^2 + z^2 = 4\right\}.$$

Bestäm det största och minsta värde som f antar på sin definitionsmängd $\mathcal{D}(f)$. **(4 p)**

8. Greens formel är ett viktigt verktyg för beräkning av kurvintegraler.
   (a) Formulera Greens formel. Glöm inte att ange alla förutsättningar. **(1 p)**
   (b) Bevisa Greens formel för det fall då kurvan är den positivt orienterade randkurvan till enhetskvadraten, dvs till det område som ges av $0 \le x \le 1$ och $0 \le y \le 1$. **(3 p)**

9. Om två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) väljs slumpvis med likformig fördelning inuti enhetscirkeln kan vi beräkna den genomsnittliga arean av triangeln som bildas av de två punkterna tillsammans med origo som

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 \frac{r_1 r_2}{2}\left|\sin(\theta_1 - \theta_2)\right|\, r_1 r_2 dr_1 dr_2 d\theta_1 d\theta_2.$$

Beräkna denna genomsnittlga area. **(4 p)**