Institutionen för matematik
SF1626 Flervariabelanalys

Lösningsförslag till tentamen
Tisdagen den 10 januari 2017

DEL A

1. En partikel rör sig så att positionen efter starten ges av

$$(x, y, z) = (t \cos t, t \sin t, t)$$

där enheten på axlarna är meter och där t är tiden mätt i sekunder.

(a) Vilken hastighet har partikeln efter 1 sekund? **(1 p)**
(b) Vilken fart har partikeln efter 1 sekund? **(1 p)**
(c) Hur lång är den kurva partikeln har följt under den första sekunden? **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Hastigheten är tidsderivatan av positionen, dvs

$$(x'(t), y'(t), z'(t)) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1) \quad \text{m/s}$$

och vid tidpunkten $t = 1$ får vi

$$(x'(1), y'(1), z'(1)) = (\cos 1 - \sin 1, \sin 1 + \cos 1, 1) \quad \text{m/s}$$

(b) Farten är längden på hastighetsvektorn, dvs farten efter 1 s är

$$\begin{aligned} |(x'(1), y'(1), z'(1))| &= |(\cos 1 - \sin 1, \sin 1 + \cos 1, 1)| \\ &= \sqrt{(\cos 1 - \sin 1)^2 + (\sin 1 + \cos 1)^2 + 1} \\ &= \sqrt{3} \quad \text{m/s} \end{aligned}$$

(c) Längden av den kurva som partikeln har följt ges av

$$\begin{aligned} \int_0^1 |(x'(t), y'(t), z'(t))| \, dt &= \int_0^1 \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} \, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{2 + t^2} \, dt = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln \sqrt{2} \end{aligned}$$

Svar.

(a) $(\cos 1 - \sin 1, \sin 1 + \cos 1, 1)$ m/s
(b) $\sqrt{3}$ m/s
(c) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln \sqrt{2}$ m.

2. Undersök om fältet $\mathbf{F}(x, y) = (\sin x \sin y, -\cos x \cos y)$ är konservativt och beräkna sedan integralen
$$\int_C \sin x \sin y \, dx - \cos x \cos y \, dy$$
längs kurvan C som ges av $y = x^2$ från $(0, 0)$ till $(1, 1)$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi undersöker om fältet är konservativt genom att se om det går att hitta en potentialfunktion ϕ. Kraven som ϕ måste uppfylla är att
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sin x \sin y \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\cos x \cos y.$$
Vi ser att om vi tar
$$\phi(x, y) = -\cos x \sin y$$
så är båda villkoren uppfyllda i hela planet. Det finns alltså en potentialfunktion och fältet är därmed konservativt. Vi beräknar kurvintegralen med hjälp av den potentialfunktion vi har hittat:
$$\begin{aligned}\int_C \sin x \sin y \, dx - \cos x \cos y \, dy &= \phi(1, 1) - \phi(0, 0) \\ &= -\cos 1 \sin 1 - (-\cos 0 \sin 0) \\ &= \cos 1 \sin 1.\end{aligned}$$

Svar. Fältet är konservativt och kurvintegrals värde är $-\cos 1 \sin 1$.

3. Betrakta funktionen $f(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 + y^4$.
   (a) Visa att $(0,0)$, $(3,-3)$ och $(3,3)$ är de enda kritiska punkterna. **(1 p)**
   (b) Bestäm Taylorutvecklingen till andra ordningen kring den kritiska punkten $(3,-3)$ och använd detta för att avgöra om den utgör ett lokalt minimum, ett lokalt maximum eller om den är en sadelpunkt. **(2 p)**
   (c) Förklara varför det inte går att använda Taylorutvecklingen av andra ordningen kring origo för att avgöra om origo är en lokal extrempunkt eller en sadelpunkt. **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Funktionen f är ett polynom och alltså deriverbar hur många gånger som helst i hela planet. Vi har att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6y^2 \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -12xy + 4y^3.$$

Kritiska punkter är lösningar till $\partial f/\partial x = \partial f \partial y = 0$. Den första ekvationen, $\partial f/\partial x = 0$ ger att $y = \pm x$ vilket insatt i den andra ger att $12x^2 = 4x^3$ med lösningar $x = 0$ och $x = 3$. Då $y = \pm x$ ger detta att de enda kritiska punkterna är $(0,0)$, $(3,3)$ och $(3,-3)$.

(b) För att bestämma de sökta Taylorpolynomen behöver vi andraderivatorna till f. Vi har

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12x + 12y^2.$$

Vi använder detta tillsammans med informationen från del (a) och får först Taylorpolynomet av grad 2 kring punkten $(3,-3)$ till

$$p_{3,-3}(x,y) = -27 + \frac{1}{2}\left(36(x-3)^2 + 2 \cdot 36(x-3)(y+3) + 72(y+3)^2\right)$$

vilket vi med $x = 3 + h$ och $y = -3 + k$ kan skriva

$$p_{3,-3}(3+h, -3+k) = -27 + \frac{1}{2}\left(36h^2 + 2 \cdot 36hk + 72k^2\right)$$

Vi kvadratkompletterar den kvadratiska formen och får att

$$\frac{1}{2}\left(36h^2 + 2 \cdot 36hk + 72k^2\right) = 18((h+k)^2 + k^2)$$

som är positivt definit. Vi drar slutsatsen att den kritiska punkten $(3,-3)$ är ett lokalt minimum.

(c) Taylorpolynomet av grad 2 kring origo är bara $p_{0,0} = 0$. Den kvadratiska formen är här semidefinit och ger ingen information i och med att alla andraderivator är noll i origo.

Svar.

(a) Se lösningen ovan.
(b) Punkten är ett lokalt minima.
(c) Taylorpolynomet är noll så den kvadratiska formen är semidefinit.

Del B

4. Låt D vara området i planet som beskrivs av olikheterna
$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{och} \quad x \leq |y|.$$
Bestäm masscentrum av området D. **(4 p)**

Lösningsförslag. I polära koordinater beskrivs D av
$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4}, \qquad 0 \leq r \leq 1.$$
Av symmetriskäl är masscentrums y-koordinat lika med noll. Området D är tre fjärdedelar av enhetscirkelskivan, så dess area är $\frac{3\pi}{4}$. Masscentrums x-koordinat är
$$\begin{aligned}
\frac{\iint_D x\,dA}{\iint_D dA} &= \frac{4}{3\pi}\int_{\pi/4}^{7\pi/4}\left(\int_0^1 r^2\cos\theta\,dr\right)d\theta \\
&= \frac{4}{3\pi}\cdot\left(\int_{\pi/4}^{7\pi/4}\cos\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_0^1 r^2\,dr\right) \\
&= \frac{4}{3\pi}\cdot\left(\sin\frac{7\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{3} \\
&= \frac{4}{3\pi}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{3} \\
&= -\frac{8}{9\pi\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$
Masscentrum för D är alltså punkten $(-9/9\pi\sqrt{2}, 0)$.

Svar. Masscentrum för D är punkten $(-8/9\pi\sqrt{2}, 0)$.

5. *De hyperboliska koordinaterna* i planet är definierade genom

$$(u,v)=\phi(x,y)=\left(\ln\sqrt{\frac{x}{y}},\sqrt{xy}\right)\qquad \text{för } x,\ y>0.$$

(a) Beräkna Jacobimatrisen till ϕ. **(2 p)**

(b) Använd linjär approximation för att hitta det ungefärliga värdet av $\phi(1{,}01,\ 0{,}99)$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Jacobimatrisen ges av

$$J_\phi(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2x} & -\frac{1}{2y}\\ \frac{y}{2\sqrt{xy}} & \frac{x}{2\sqrt{xy}}\end{pmatrix}$$

(b) Vi har att $\phi(1,1)=(0,1)$. Vidare gäller att i punkten $(1,1)$ blir Jacobimatrisen till ϕ:

$$J_\phi(1,1)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

så den linjära approximationen kring punkten $(1,1)$ blir

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\end{pmatrix}.$$

Speciellt får vi om vi i den linjära approximationen väljer $x=1{,}01$ och $y=0{,}99$ att

$$\phi(1{,}01,\ 0{,}99)\approx(0{,}01,\ 1{,}00)$$

Svar.

(a) Se lösningen.

(b) $\phi(1{,}01,\ 0{,}99)\approx(0{,}01,\ 1{,}00)$

6. I en del av ett visst fiskevatten visar det sig att fiskarna alltid simmar enligt ett bestämt flöde, som kan beskrivas av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (1, -2xy, 2xz) \quad \text{[kilogram fisk per minut och areaenhet]},$$

där x och y är geografiska koordinater och $z \leq 0$ djupet.

(a) Ange de ekvationer med vilka flödeslinjerna till fältet kan bestämmas. **(1 p)**

(b) Ett plant kvadratiskt nät kan antingen sättas upp mellan punkterna

$$A: \quad (0,0,0),\ (0,1,0),\ (0,1,-1),\ (0,0,-1),$$

eller

$$B: \quad (0,1,0),\ (1,1,0),\ (1,1,-1),\ (0,1,-1).$$

Vilket alternativ bör väljas för maximal fångst och hur mycket fisk fångas då i nätet om det får hänga uppe i 5 timmar? **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Flödeslinjerna bestämms från ekvationerna

$$dx = -\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}.$$

(b) En fisk fastnar i ett av näten oavsett från vilket håll den simmar in i nätet. För att beräkna den totalal mängd fisk som fastnar i ett nät per tidsenhet skall vi darför inte beräkna $\mathbf{F}$:s (netto)flöde genom nätet, dvs det är inte $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}$ utan istället $\left|\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\right|$ vi ska integrera över nätet. Här är $\hat{\mathbf{N}}$ som vanligt ett enhetsnormalfält till ytan (nätet). (Under lösningnens gång kommer vi dock att se att $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}$ inte växlar tecken på något av näten, vilket gör att vi kan få rätt resultat även om vi utelämnar absolutbeloppstecknet.)

Nätet A ligger i planet $x = 0$ med $0 \leq y \leq 1$ och $-1 \leq z \leq 0$. Det konstanta vektorfältet $\hat{N}_A = (1, 0, 0)$ utgör ett enhetsnormalfält på A. Låt Ψ_A vara den mängd fisk som fastnar i nät A per minut. Då gäller att

$$\Psi_A = \iint_A \left|\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\right| \, dS = \iint_A |(1, -2xy, 2xz) \cdot (1,0,0)| \, dS = \int_0^1 \int_{-1}^0 1 \, dz dy = 1$$

Nätet B ligger i planet $y = 1$ med $0 \leq x \leq 1$ och $-1 \leq z \leq 0$. Det konstanta vektorfältet $\hat{N}_B = (0, 1, 0)$ utgör ett enhetsnormalfält på B. Låt Ψ_B vara den mängd fisk som fastnar i nät B per minut. Då gäller att

$$\Psi_B = \iint_B \left|\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\right| \, dS = \iint_A |(1, -2xy, 2xz) \cdot (0,1,0)| \, dS = \int_0^1 \int_{-1}^0 2xy|_{y=1} \, dz dx$$

$$= \int_0^1 \int_{-1}^0 2x \, dz \, dx = \int_0^1 2x \, dx = x^2|_0^1 = 1.$$

Alternativen är alltså likvärdiga, bägge ger en fångst om 1 kg fisk per minut, det vill säga 300 kg fisk på fem timmar.

Svar. (a) $dx = -\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$ (b) Alternativen ger lika stor fångst, under fem timmar fångas 300 kg fisk.

DEL C

7. Låt funktionen f vara given av
$$f(x,y,z) = x + y + z$$
med definitionsmängd
$$\mathcal{D}(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 1 \text{ och } x^2 + y^2 + z^2 = 4\right\}.$$
Bestäm det största och minsta värde som f antar på sin definitionsmängd $\mathcal{D}(f)$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Definitionsmängden $\mathcal{D}(f)$ består av slutna kurvor som ligger i sfären med radie 2 runt origo. Det är alltså en sluten och begränsad mängd. Eftersom funktionen f dessutom är kontinuerlig så vet vi att den antar största och minsta värden. Vi använder Lagranges metod för att finna dessa.

Funktionen $f(x,y,z) = x + y + z$ har en definitionsmängd som beskrivs av två villkor
$$g(x,y,z) = xy = 1$$
och
$$h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$
Största och minsta värden finns i punkter där $\operatorname{grad} f$ är en linjärkombination av $\operatorname{grad} g$ och $\operatorname{grad} h$, alltså punkter där
$$\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g + \mu \operatorname{grad} h$$
för några tal λ och μ. Detta ger
$$(1,1,1) = \lambda(y,x,0) + \mu(2x,2y,2z),$$
eller
$$\begin{aligned} 1 &= \lambda y + 2\mu x \\ 1 &= \lambda x + 2\mu y \\ 1 &= 2\mu z \end{aligned}$$
som ska vara uppfyllt samtidigt som
$$xy = 1 \qquad \text{och} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$
Den första ekvationen minus den andra ger
$$0 = \lambda y + 2\mu x - \lambda x - 2\mu y = 2\mu(x-y) - \lambda(x-y) = (2\mu - \lambda)(x-y),$$
så antingen är $2\mu = \lambda$ eller $x = y$. Om $2\mu = \lambda$ ser vi först att dessa tal inte kan vara noll. Alltså ger den första och den tredje ekvationen att
$$\lambda(x+y) = \lambda y + 2\mu x = 1 = 2\mu z = \lambda z$$
och
$$z = x + y.$$
Om vi adderar bivillkoret $h = 4$ och två gånger bivillkoret $g = 1$ får vi
$$x^2 + 2xy + y^2 + z^2 = 4 + 2,$$

eller
$$(x+y)^2 + (x+y)^2 = 6,$$
vilket ger
$$x + y = \pm\sqrt{3}.$$
Detta tillsammans med $xy = 1$ ger
$$0 = x^2 \pm \sqrt{3}x + 1 = \left(x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} + 1 = \left(x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4},$$
vilket är omöjligt. Det finns alltså inga lösningar om $2\mu = \lambda$. Ifall $x = y$ har vi från $xy = 1$ att
$$x = y = \pm 1.$$
Detta insatt i $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ger $2 + z^2 = 4$ eller
$$z = \pm\sqrt{2}.$$
Vi har alltså hittat fyra punkter där största och minsta värde kan antas. Funktionens värde i dessa punkter är
$$\begin{aligned} f(1,1,\sqrt{2}) &= 2 + \sqrt{2} \\ f(1,1,-\sqrt{2}) &= 2 - \sqrt{2} \\ f(-1,-1,\sqrt{2}) &= -2 + \sqrt{2} \\ f(-1,-1,-\sqrt{2}) &= -2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$
och vi ser att största och minsta värden är
$$f(1,1,\sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} \qquad \text{och} \qquad f(-1,-1,-\sqrt{2}) = -2 - \sqrt{2}.$$

Svar. Det största värdet är $2 + \sqrt{2}$ och det minsta värdet är $-2 - \sqrt{2}$.

8. Greens formel är ett viktigt verktyg för beräkning av kurvintegraler.
   (a) Formulera Greens formel. Glöm inte att ange alla förutsättningar. **(1 p)**
   (b) Bevisa Greens formel för det fall då kurvan är den positivt orienterade randkurvan till enhetskvadraten, dvs till det område som ges av $0 \le x \le 1$ och $0 \le y \le 1$. **(3 p)**

Lösningsförslag. A.

(a) Låt E vara ett reguljärt slutet område i xy-planet vars rand γ består av en eller flera styckvis släta enkla slutna kurvor som är positivt orienterade med avseende på E. Om $\mathbf{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ är ett glatt vektorfält på E så gäller att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy.$$

(b) Kalla enhetskvadraten för E och dess positivt orienterade randkurva för γ. Vi har

$$\begin{aligned}
\iint_E -\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 -\frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right)\,dx \\
&= \int_0^1 [-P(x,y)]_{y=0}^{y=1}\,dx \\
&= \int_0^1 -P(x,1)\,dx - \int_0^1 -P(x,0)\,dx \\
&= \int_1^0 P(x,1)\,dx + \int_0^1 P(x,0)\,dx \\
&= \int_\gamma P\,dx
\end{aligned}$$

eftersom γ är positivt orienterad och bidraget från de lodräta delarna är noll. På samma sätt får man att

$$\iint_E \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \int_\gamma Q\,dy \quad .$$

Sammantaget har vi då bevisat satsen för detta fall.

9. Om två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) väljs slumpvis med likformig fördelning inuti enhetscirkeln kan vi beräkna den genomsnittliga arean av triangeln som bildas av de två punkterna tillsammans med origo som
$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 \frac{r_1 r_2}{2}\,|\sin(\theta_1-\theta_2)|\; r_1 r_2 dr_1 dr_2 d\theta_1 d\theta_2.$$
Beräkna denna genomsnittlga area. **(4 p)**

Lösningsförslag.

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 \frac{r_1 r_2}{2}\,|\sin(\theta_1-\theta_2)|\; r_1 r_2 dr_1 dr_2 d\theta_1 d\theta_2$$
$$= \frac{1}{2\pi^2}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sin(\theta_1-\theta_2)|\,d\theta_1 d\theta_2\right)\left(\int_0^1 r_1^2\,dr_1\right)\left(\int_0^1 r_2^2\,dr_2\right)$$

För att hantera beloppstecknet kan vi byta variabler så att $s = \theta_1 - \theta_2$ och $t = \theta_2$. Vi får Jocobianen 1 och därmed $dsdt = d\theta_1 d\theta_2$.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sin(\theta_1-\theta_2)|\; d\theta_1 d\theta_2 = \int_0^{2\pi}\int_{-t}^{2\pi-t}|\sin(s)|\; dsdt = [\sin(s) \text{ har period } 2\pi]$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sin(s)|\; dsdt = 2\pi\int_0^{\pi}\sin(s)\,ds + 2\pi\int_{\pi}^{2\pi}-\sin(s)\,ds$$
$$= 2\pi\left[-\cos(s)\right]_0^{\pi} + 2\pi\left[\cos(s)\right]_{\pi}^{2\pi}$$
$$= 2\pi(-(-1)-(-1)+1-(-1)) = 8\pi.$$

De båda andra faktorerna är lika och ges av
$$\int_0^1 r^2\,dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Sammantaget får vi den genomsnittliga aren till
$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 \frac{r_1 r_2}{2}\,|\sin(\theta_1-\theta_2)|\; r_1 r_2 dr_1 dr_2 d\theta_1 d\theta_2 = \frac{1}{2\pi^2}\cdot 8\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9\pi}.$$

Svar. Den genomsnittliga arean ges av $4/(9\pi)$ areaenheter.