KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
onsdag, 11 januari 2017

Skrivtid: 08:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst tre poäng.

DEL A

1. (a) För vilka värden på k har ekvationssystemet (med avseende på x, y och z)

$$\begin{aligned} kx + ky + z &= 3 \\ 2x + ky + z &= 2 \\ 4x + 3y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

en entydig lösning, ingen lösning, oändligt många lösningar? **(4 p)**

(b) Lös ekvationssystemet för $k = 1$. **(2 p)**

2. P är det plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåller punkten $(1, 0, 0)$ och linjen $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, t i $\mathbb{R}$.

(a) Bestäm en normalvektor och en ekvation till P. **(3 p)**

(b) Bestäm ortogonalprojektionen av punkten $(2, 4, 2)$ på linjen som går genom origo och punkten $(0, 1, -1)$. **(3 p)**

Var god vänd!

Del B

3. Låt $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ vara övergångsmatrisen från basen $\mathcal{V}$ till basen $\mathcal{W}$ av ett delrum U av $\mathbb{R}^4$.

(a) Bestäm övergångsmatrisen från bas $\mathcal{W}$ till bas $\mathcal{V}$. **(3 p)**

(b) Låt $f\colon U \to U$ vara en linjär avbildning som uppfyller $[f]_{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Bestäm $[f]_{\mathcal{V}}$. **(3 p)**

(Med $[f]_{\mathcal{B}}$ menas matrisen för avbildningen f med avseende på basen $\mathcal{B}$.)

4. En linjär avbildning $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras av formeln $L(\vec{x}) = \vec{e}_3 \times \vec{x}$ för alla vektorer $\vec{x}$. Här är $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och med $\times$ menas kryssprodukten.

(a) Bestäm standardmatris till $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. **(2 p)**

(b) L transformerar planet $x_3 = 0$ till sig själv. Beskriv geometrisk hur vektorer i detta plan transformeras. **(1 p)**

(c) Bestäm alla egenvärden och tillhörande egenvektorer till L. **(3 p)**

Del C

5. Låt Q vara den kvadratiska form på $\mathbb{R}^{2n}$ som är definierad genom

$$Q(x_1, \dots, x_{2n}) = x_1x_{2n} + x_2x_{2n-1} + \cdots + x_nx_{n+1}.$$

(a) Bestäm den symmetriska matrisen som tillhör Q. **(2 p)**

(b) Avgör karaktären av Q: positivt/negativt (semi)definit eller indefinit? **(4 p)**

6. Låt A vara en $n \times n$-matris. $\mathrm{Col}(A)$ betecknar kolonnrummet av A. Visa:

(a) Om $\mathrm{Col}(A^k) = \mathrm{Col}(A^{k+1})$ för något heltal $k \geq 1$, så gäller $\mathrm{Col}(A^k) = \mathrm{Col}(A^{k+l})$ för alla heltal $l \geq 1$. **(3 p)**

(b) Om $A^j = 0$ för något heltal $j \geq 1$ så är $A^n = 0$. **(3 p)**