KTH, Matematik

Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 2)
10 januari 2017 kl. 14:00-19:00

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–28 poäng, B–24, C–21, D–17, E–14, Fx–13.
Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina (masha@kth.se).

1. Bestäm konstanterna a, b så att integralen

$$\int_{-1}^{1} |a + bx - e^{-x}|^2 dx$$

blir så liten som möjligt.

Lösning: Betrakta rummet $L^2([-1,1])$ med inre produkt $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$. Integralen ovan kan interpreteras som avstånd mellan vektorn $f := e^{-x}$ och delrummet W av $L^2([-1,1])$ som spänns av polynomen $P_0 = 1$ och $P_1 = x$. Detta avstånd är som minst om $(aP_0 + bP_1)$ är den ortogonala projektionen av f på delrummet W.

Observera att polynomen $P_0 = 1$ och $P_1 = x$ är ortogonala: $\int_{-1}^{1} P_0(x)\overline{P_1(x)}dx = 0$. Den ortogonala projektionen i fråga ges därför av formeln:

$$\frac{\langle P_0, f\rangle}{\|P_0\|^2}P_0 + \frac{\langle P_1, f\rangle}{\|P_1\|^2}P_1. \tag{1}$$

Vi beräknar:

$$\|P_0\|^2 = \langle P_0, P_0\rangle = \int_{-1}^{1} dx = 2, \quad \|P_0\|^2 = \langle P_1, P_1\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = 2/3,$$

$$\langle P_0, f\rangle = \int_{-1}^{1} e^{-x}dx = e - e^{-1}, \quad \langle P_1, f\rangle = \int_{-1}^{1} xe^{-x}dx = -2e^{-1}$$

Insättning av värden i (1) ger att ortogonala projektionen av f på delrummet som spänns av P_0 och P_1 är

$$(e - e^{-1})/2 - 3e^{-1}x.$$

Svar: integralen i fråga är som minst då $a = (e - e^{-1})/2$ och $b = -3e^{-1}$.

2. Antag att $a_0 = 2$, $a_1 = 7$, och för $n = 0, 1, 2, \dots$ gäller:

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0.$$

Bestäm formeln för a_n, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Lösning: Låt $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$, och låt $A(z) = \mathcal{Z}[a]$ beteckna dess Z-transform. Följden $(a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ Z-transformeras till $zA(z) - a_0 z$, och $(a_{n+2})_{n=0}^{\infty}$ Z-transformeras till $z^2 A(z) - a_0 z^2 - a_1 z$. Z-transformen av ekvationen (samt insättning av värden $a_0 = 2$, $a_1 = 7$) ger:

$$A(z)(z^2 - 7z + 10) = 2z^2 - 7z \Leftrightarrow A(z) = \frac{2z^2 - 7z}{z^2 - 7z + 10} = \frac{(2z-7)z}{(z-5)(z-2)}$$

(ekvivalensen gäller för $z \neq 2$, $z \neq 5$). Partialbråksuppdelning ger:

$$A(z) = \frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-5}.$$

Vi transformerar resultatet tillbaka: $a_n = 2^n + 5^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

3. a) Bevisa från definition att derivatan av Heavisides funktion (i distributionsmening) är lika med Diracs delta-funktion: $H'(x) = \delta(x)$.

b). Låt $f(x) = |2 - x^2|$. Bestäm $f'(x)$ och $f''(x)$ i distributionsmening. Förenkla ditt svar så långt som möjligt.

Lösning: a).—se Example 8.21 i boken.

b). Vi skriver om funktionen:

$$\begin{aligned} f(x) = |2 - x^2| &= (2 - x^2)(H(x + \sqrt{2}) - H(x - \sqrt{2})) + (x^2 - 2)H(x - \sqrt{2}) \\ &+ (x^2 - 2)(1 - H(x + \sqrt{2})) = (x^2 - 2)(2H(x - \sqrt{2})) - 2H(x + \sqrt{2}) + 1). \end{aligned}$$

För varje multiplikator funktion ξ och distribution g av klass $\mathcal{S}'$ gäller formeln $(\xi g)' = \xi' g + \xi g'$. Därför har vi:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(2H(x - \sqrt{2})) - 2H(x + \sqrt{2}) + 1) + (x^2 - 2)(2\delta(x - \sqrt{2})) - 2\delta(x + \sqrt{2})) \\ &= 2x(2H(x - \sqrt{2})) - 2H(x + \sqrt{2}) + 1). \end{aligned}$$

På sista steget har vi använt relationen

$$\phi(x)\delta(x - a) = \phi(a)\delta(x - a)$$

som gäller för varje multiplikator funktion ϕ. I vårt fall $\phi(x) = x^2 - 2$, som är en multiplikator funktion.

På samma sätt,

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2(2H(x - \sqrt{2})) - 2H(x + \sqrt{2}) + 1) + 2x(2\delta(x - \sqrt{2})) - 2\delta(x + \sqrt{2})) \\ &= 2(2H(x - \sqrt{2})) - 2H(x + \sqrt{2}) + 1) + 4\sqrt{2}\delta(x - \sqrt{2})) + 4\sqrt{2}\delta(x + \sqrt{2})). \end{aligned}$$

4. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + t^2)^2} dt$$

med hjälp av Plancherels formel.

Lösning: Låt $\frac{1}{(1+t^2)}$. Vi beräknar (direkt eller BETA F41b.) att $\hat{f}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$. Plancherels formel säger att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\pi e^{-|\omega|})^2 d\omega = \pi/2.$$

5. Lös problemet

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u_x(0,t) &= u_x(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= 1 + \cos 3x, \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Lösning: Vi söker lösningar på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$. Insättning i ekvationen samt separation av variabler ger systemet:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ T'(t) = -\lambda T(t), \end{cases}$$

och randvillkoren skrivs om som $X'(0) = X'(\pi) = 0$.

Låt oss studera den första ekvationen först.

För $\lambda < 0$ har den bara triviala lösningar.

För $\lambda = 0$ har vi den allmänna lösningen $X(x) = ax + b$ (där $a, b \in \mathbb{R}$). Randvillkoren ger: $a = 0$. Alltså lösningen $T(t) = b$ uppfyller dessutom randvillkoren för varje $b \in \mathbb{R}$.

Låt $\lambda > 0$. Beteckna $n := \sqrt{\lambda}$. Den allmänna lösningen är $X(x) = A\cos nx + B\sin nx$. Villkoret $X'(0) = 0$ ger $B = 0$, alltså $X(x) = A\cos nx$. Villkoret $X'(\pi) = 0$ medför att vi får icke-triviala lösningar på formen $X(x) = A\cos nx$ för alla $n = 1, 2, \ldots$.

För samma värden av $\lambda = n^2$ har den andra ekvationen lösningar $T(t) = ce^{-n^2 t}$, $c \in \mathbb{R}$, och därför är funktioner

$$u_n(x,t) = e^{-n^2 t} \cos nx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

lösningar till randvärdesproblemet.

Linjära kombinationer av lösningarna ovan, dvs funktioner på formen

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-n^2 t} \cos nx, \quad N \in \mathbb{N}$$

är också lösningar till randvärdesproblemet enligt superpositionsprincipen.

För att lösa begynnelsevärdesproblemet, söker vi koefficienter a_n sådana att

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos nx = 1 + \cos 3x.$$

Detta ger $a_0 = 1$, $a_3 = 1$, och $a_n = 0$ för $n \neq 0, 3$. Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$u(x,t) = 1 + e^{-9t} \cos 3x.$$

6. Visa att $K_n(t) = \frac{1}{2}ne^{-n|t|}$, $n = 1, 2, \ldots$, definierar en positiv summationskärna. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n|t|} \cos(1-t)dt.$$

Lösning: Vi säger att följden av funktioner $K_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, definierar en positiv summationskärna (i vårt fall, på $\mathbb{R}$) om för $n = 1, 2, \ldots$ gäller:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)dt = 1$;
2. $K_n(t) \geq 0$ för alla $t \in \mathbb{R}$;
3. $\lim_{n\to\infty} \int_{|t|>\delta} K_n(t)dt = 0$ för alla $\delta > 0$.

Verifierar 1.: $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} ne^{-n|t|}dt = \int_0^{\infty} ne^{-nt}dt = 1$.
Villkor 2. är uppenbar; Verifierar 3).: för varje $\delta > 0$ gäller

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|t|>\delta} K_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_{t>\delta} ne^{-nt}dt = \lim_{n\to\infty} e^{-n\delta} = 0.$$

Vi vet att om K_n är en positiv summationskärna på $\mathbb{R}$, och funktionen f är kontinuerlig i s_0, så

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)f(t-t_0)dt = f(t_0).$$

Eftersom $f(t) = \cos t$ är kontinuerlig på $\mathbb{R}$, och integralen i fråga har formen ovan med $K_n(t) = \frac{1}{2}ne^{-n|t|}$, så

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n|t|} \cos(1-t)dt = \cos 1.$$

7. Betrakta problemet

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(0) = u(\pi) + u'(\pi) = 0.$$

Finn ett fullständigt ortogonalt system av lösningar till detta problem i rummet $L^2([0,\pi])$ med avseende på standard inre-produkten i detta rum.

Lösning: Betrakta ekvationen $u''(x) + \lambda u(x) = 0$. Karakteristiska ekvationen är $r^2 = -\lambda$.

1). Låt $\lambda = 0$. Då är den allmänna lösningen $u(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Randvillkorna ger $a = b = 0$.

2). Låt $\lambda > 0$, och beteckna $\mu := \sqrt{\lambda} > 0$. Då är den allmänna lösningen $u(x) = a\cos\mu x + b\sin\mu x$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Randvillkorna ger: $0 = u(0) = a$, så att $u(x) = b\sin\mu x$. Vidare, om vi antar att $b \neq 0$, så

$$0 = u(\pi) + u'(\pi) = b\sin\mu\pi + b\mu\cos\mu\pi \Leftrightarrow \tan\mu\pi = -\mu.$$

Den sista ekvationen har oändligt många positiva lösningar μ_n, $n = 1, 2, \ldots$ (för att se det, skissa grafer $y = \tan\mu\pi$ och $y = \mu$ i planet med koordinater (μ, y)). För dessa μ_n, är funktionerna

$$u_n(x) = \sin\mu_n x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

lösningar till randvärdesproblemet ovan.

3). Låt $\lambda < 0$, och beteckna $\mu := \sqrt{-\lambda} > 0$. Då är den allmänna lösningen $u(x) = ae^{\mu x} + be^{-\mu x}$. Randvillkorna ger: $0 = u(0) = a + b$, alltså $b = -a$, och $u(x) = a(e^{\mu x} - e^{-\mu x})$; vidare, för $a \neq 0$

$$0 = u(\pi) + u'(\pi) = a(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi} + \mu e^{\mu\pi} + \mu e^{-\mu\pi}) \Leftrightarrow \mu = -\frac{e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}}{e^{\mu\pi} + e^{-\mu\pi}}$$

Denna ekvation har inga nollskilda rötter (eftersom för $\mu > 0$ har vi $e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi} > 0$, och högerled i ekvationen ovan är negativ; likartat för $\mu < 0$).

Randvärdesproblemet i fråga är av Sturm-Liouville typ. Enligt Sturm-Liouvilles sats, utgör systemet $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ ett fullständigt ortogonalt system i $L^2([0, \pi])$.

8. a). För en funktion $f \in L^2(\mathbb{T})$, låt $c_n(f)$ beteckna f:s (komplexa) Fourierkoefficienter. Antag att $f \in C^2(\mathbb{T})$ (dvs f är 2π-periodisk och två gånger kontinuerligt deriverbar).

Uttryck $c_n(f')$ och $c_n(f'')$ genom n och $c_n(f)$ (motivera noga!).

Visa att det finns en konstant $M > 0$ sådan att

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|^2} \quad \text{för alla } n \neq 0.$$

b). Använd Fourierseriemetoden för att bestämma alla 2π-periodiska, 4 gånger kontinuerligt deriverbara lösningar till ekvationen

$$y''(t) + 4y(t + \pi) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lösning: a).—se sid. 84-85 i boken.

b). Låt $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ vara Fourierserien för y. Enligt a), har y'' Fourierserien $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-n^2 c_n)e^{int}$.

Eftersom vi söker $y \in C^4$ (dvs 4 gånger kontinuerligt deriverbar), så $y'' \in C^2$, och enligt a), konvergerar båda Fourierserierna ovan till motsvarande funktioner (alltså, $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ och $y''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-n^2 c_n)e^{int}$ för alla $t \in \mathbb{R}$).

Vi skriver om ekvationen mha serierna:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-n^2 c_n)e^{int} + 4\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(t+\pi)} = 0,$$

och jämför koefficienter vid samma exponent: $n^2 c_n = 4c_n e^{in\pi}$. Denna ekvation är uppfylld för varje komplext tal c_n om $n = 2$ eller $n = -2$, och bara för $c_n = 0$ om $n \neq \pm 2$.

Svaret är alltså $y(t) = ae^{2it} + be^{-2it}$ där a och b är godtyckliga komplexa konstanter. Med hjälp av Eulers formel, kan man skriva om detta till $y(t) = c\cos 2t + d\sin 2t$ där c och d är godtyckliga komplexa konstanter.