Institutionen för matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Bedömningskriterier till tentamen
Tisdagen den 10 januari 2017

Allmänt gäller följande:

- För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.
- Om lösningen helt saknar förklarande text, eller motsvarande förklaring i form av logiska symboler, till beräkningar och formler ges högst två poäng. Detta markeras vid bedömningen med FTS (Förklarande text saknas).
- Om lösningen har förklarande text men inte tillräckligt för att det ska gå att förstå alla steg ges högst tre poäng sammanlagt på uppgiften. Detta markeras med FLFT (För lite förklarande text).
- Mindre räknefel ger i allmänhet inte avdrag om de inte ändrar uppgiftens karaktär eller leder till orimligheter som borde ha upptäckts.
- Lösningen ska kunna läsas av en person som inte är insatt i problemet i förväg. Bevisbördan ligger på den som skriver, inte på den som läser.

(1) En partikel rör sig så att positionen efter starten ges av

$$(x, y, z) = (t \cos t, t \sin t, t)$$

där enheten på axlarna är meter och där t är tiden mätt i sekunder.

(a) Vilken hastighet har partikeln efter 1 sekund? **(1 p)**

(b) Vilken fart har partikeln efter 1 sekund? **(1 p)**

(c) Hur lång är den kurva partikeln har följt under den första sekunden? **(2 p)**

Bedömning:

(a) Korrekt beräkning av hastighetsvektorn , **1 poäng**

(b) Korrekt beräkning av farten, **1 poäng**

(c)
- Korrekt formel för båglängden, **1 poäng**
- Korrekt uppställd enkelintegral för beräkning av båglängden som $\int_0^1 \sqrt{2+t^2}\,dt$, **1 poäng**

(2) Undersök om fältet $\mathbf{F}(x, y) = (\sin x \sin y, -\cos x \cos y)$ är konservativt och beräkna sedan integralen

$$\int_C \sin x \sin y\, dx - \cos x \cos y\, dy$$

längs kurvan C som ges av $y = x^2$ från $(0, 0)$ till $(1, 1)$. **(4 p)**

Bedömning:

- Korrekt verifiering av att fältet är konservativt, **1 poäng**
- Korrekt bestämd potential, **1 poäng**
- Korrekt användning av potentialen för beräkning av integralen, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av kurvintegralen, **1 poäng**

(3) Betrakta funktionen $f(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 + y^4$.

(a) Visa att $(0, 0)$, $(3, -3)$ och $(3, 3)$ är de enda kritiska punkterna. **(1 p)**

(b) Bestäm Taylorutvecklingen till andra ordningen kring den kritiska punkten $(3, -3)$ och använd detta för att avgöra om den utgör ett lokalt minimum, ett lokalt maximum eller om den är en sadelpunkt. **(2 p)**

(c) Förklara varför det inte går att använda Taylorutvecklingen av andra ordningen kring origo för att avgöra om origo är en lokal extrempunkt eller en sadelpunkt. **(1 p)**

Bedömning:

(a) Korrekt motivering till att detta är de enda kritiska punkterna, **1 poäng**

(b)
- Korrekt beräkning av Taylorpolynomet, **1 poäng**
- Korrekt användning av Taylorpolynomet för att visa att punkten är ett lokalt minimum, **1 poäng**

(c) Korrekt motivering till varför Taylorpolynomet inte kan användas för att avgöra karaktären av origo som kritsk punkt, **1 poäng**

(4) Låt D vara området i planet som beskrivs av olikheterna

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{och} \quad x \leq |y|.$$

Bestäm masscentrum av området D. **(4 p)**

Bedömning:

- Korrekt tolkning av området, **1 poäng**
- Korrekt formel för beräkning av masscentrum, **1 poäng**
- Korrekt övergång till polära koordinater i beräkningen av integralerna, **1 poäng**
- Korrekt beräkning av x-koordinaten för masscentrum, **1 poäng**

(5) *De hyperboliska koordinaterna* i planet är definierade genom

$$(u, v) = \phi(x, y) = \left(\ln \sqrt{\frac{x}{y}}, \sqrt{xy}\right) \quad \text{för } x,\ y > 0.$$

(a) Beräkna Jacobimatrisen till ϕ. **(2 p)**

(b) Använd linjär approximation för att hitta det ungefärliga värdet av $\phi(1{,}01,\ 0{,}99)$. **(2 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt beräkning av partialderivatorna, **1 poäng**
- Korrekt beräknad Jacobimatris, **1 poäng**

(b)
- Korrekt formel för approximationen, **1 poäng**
- Korrekt slutförd approximation, **1 poäng**

(6) I en del av ett visst fiskevatten visar det sig att fiskarna alltid simmar enligt ett bestämt flöde, som kan beskrivas av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (1, -2xy, 2xz) \quad \text{[kilogram fisk per minut och areaenhet],}$$

där x och y är geografiska koordinater och $z \leq 0$ djupet.

(a) Ange de ekvationer med vilka flödeslinjerna till fältet kan bestämmas. **(1 p)**

(b) Ett plant kvadratiskt nät kan antingen sättas upp mellan punkterna

$$A: \quad (0, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 1, -1),\ (0, 0, -1),$$

eller

$$B: \quad (0, 1, 0),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, -1),\ (0, 1, -1).$$

Vilket alternativ bör väljas för maximal fångst och hur mycket fisk fångas då i nätet om det får hänga uppe i 5 timmar? **(3 p)**

Bedömning:

(a) Korrekt bestämd ekvation för fältlinjerna, **1 poäng**

(b)
- Korrekt formel för beräkning av flödet, **1 poäng**
- Korrekt beräkning av flödet i ett av fallen, **1 poäng**
- Korrekt slutförd jämförelse mellan de två fallen, **1 poäng**

(7) Låt funktionen f vara given av

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

med definitionsmängd

$$\mathcal{D}(f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 1 \text{ och } x^2 + y^2 + z^2 = 4\right\}.$$

Bestäm det största och minsta värde som f antar på sin definitionsmängd $\mathcal{D}(f)$.

(4 p)

Bedömning:

- Korrekt motivering att funktionen måste anta ett största och ett minsta värde i definitionsområdet, **1 poäng**
- Korrekt uppställning av Lagrangevillkoret, **1 poäng**
- Korrekt motiverat största värde, **1 poäng**
- Korrekt motiverat minsta värde, **1 poäng**

(8) Greens formel är ett viktigt verktyg för beräkning av kurvintegraler.

(a) Formulera Greens formel. Glöm inte att ange alla förutsättningar. **(1 p)**

(b) Bevisa Greens formel för det fall då kurvan är den positivt orienterade randkurvan till enhetskvadraten, dvs till det område som ges av $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y \leq 1$.

(3 p)

Bedömning:

(a) Korrekt formulering av satsen med korrekta villkor på områdets regularitet, funktionens regularitet och orientering av randkurvan, **1 poäng**

(b)
- Korrekt uppställning av den likhet som ska visas , **1 poäng**
- Korrekt integration av en av termerna, **1 poäng**
- Korrekt slutfört bevis, **1 poäng**

(9) Om två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) väljs slumpvis med likformig fördelning inuti enhetscirkeln kan vi beräkna den genomsnittliga arean av triangeln som bildas av de två punkterna tillsammans med origo som

$$\frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{r_1 r_2}{2} \left|\sin(\theta_1 - \theta_2)\right| \; r_1 r_2 dr_1 dr_2 d\theta_1 d\theta_2.$$

Beräkna denna genomsnittlga area. **(4 p)**

Bedömning:

- Korrekt integration med avseende på de båda r-variablerna , **1 poäng**
- Korrekt hantering av absolutbeloppet, **1 poäng**
- Korrekt integration med avseende på de båda θ-variablerna, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning med korrekt svar, **1 poäng**