KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen med lösningsförslag
onsdag, 11 januari 2017

1. (a) För vilka värden på k har ekvationssystemet (med avseende på x, y och z)

$$\begin{aligned} kx + ky + z &= 3 \\ 2x + ky + z &= 2 \\ 4x + 3y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

en entydig lösning, ingen lösning, oändligt många lösningar? **(4 p)**

(b) Lös ekvationssystemet för $k = 1$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k & k & 1 & 3 \\ 2 & k & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \mapsto (R_1 - R_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} k-2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & k & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

Om $k = 2$ då får vi ur första raden att $0 = 1$ vilket är motsägelse. Om $k \neq 2$ så ger R_1 att $x = 1/(k-2)$. Vi kan alltså dela R_1 med $k-2$ och få

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k-2} \\ 2 & k & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \mapsto (R_2 - 2R_1) \quad R_3 \mapsto (R_3 - 4R_1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k-2} \\ 0 & k & 1 & \frac{2k-6}{k-2} \\ 0 & 3 & 3 & \frac{8k-20}{k-2} \end{array}\right]$$

Om $k = 1$ så ser man att $R_3 = 3R_2$, och eftersom vi får

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \mapsto (R_3 - 3R_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Emellertid är detta skärningen mellan två plan som ger en linje som lösning. Dvs oändlig många lösningar. Vi får alltså att

$$x = -1, \qquad y + z = 4$$

som ger $(x, y, z) = (-1, y, 4-y)$. Väljer vi $y = t$ som parameter får vi $(x, y, z) = (-1, 0, 4) + t(0, 1, -1)$.

Om $k \neq 1, 2$ så kan reducera matrisen ovan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k-2} \\ 0 & k & 1 & \frac{2k-6}{k-2} \\ 0 & 3 & 3 & \frac{8k-20}{k-2} \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \mapsto (R_2 - \frac{k}{3} R_3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k-2} \\ 0 & 0 & 1-k & * \\ 0 & 3 & 3 & \frac{8k-20}{k-2} \end{array}\right]$$

vilket, efter att ha delat rad 2 med $(k-1)$ samt reducerat rad 3, ger en enda lösning.

Svar: a) Om $k \neq 1, 2$ har vi en enda lösning. För $k = 2$ har vi inga lösningar. För $k = 1$ har vi oändligt många lösningar.

Svar: b) Då $k = 1$ har vi en linje som lösning $(x, y, z) = (-1, 0, 4) + t(0, 1, -1)$.

2. P är det plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåller punkten $(1, 0, 0)$ och linjen $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, t i $\mathbb{R}$.

(a) Bestäm en normalvektor och en ekvation till P. **(3 p)**

(b) Bestäm ortogonalprojektionen av punkten $(2,4,2)$ på linjen som går genom origo och punkten $(0,1,-1)$. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Eftersom linjen $(x,y,z)^T = t(1,1,1)^T$ ligger i planet P, ligger speciellt origo $(0,0,0)$ i P. Vektorn $\vec{v} = (1,0,0)^T$ från origo till punkten $(1,0,0)$ i P är därmed parallell med P, liksom riktningsvektorn $\vec{w} = (1,1,1)^T$ för den givna linjen. Det följer att

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är en normalvektor till P. Ekvationen för P blir då, om vi använder att origo ligger i P,

$$\vec{n} \cdot (x-0, y-0, z-0)^T = 0 \iff y - z = 0.$$

(b) Punkten $(2,4,2)$ ska projiceras (ortogonalt) på linjen L, där L är den linje som går igenom origo och genom punkten $(0,1,-1)$. Detta är ekvivalent med att projicera punktens ortsvektor $\vec{r} = (2,4,2)^T$ på linjens riktningvektor $\vec{u} = (0,1,-1)^T$, och vi får

$$\operatorname{proj}_{\vec{u}} \vec{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{||\vec{u}||^2} \vec{u} = \frac{0+4-2}{1^2 + (-1)^2} \vec{u} = \vec{u}.$$

Ortsvektorn $\vec{r}$ för punkten $(2,4,2)$ projiceras alltså ortsvektorn för punkten $(0,1,-1)$.

3. Låt $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ vara övergångsmatrisen från basen $\mathcal{V}$ till basen $\mathcal{W}$ av ett delrum U av $\mathbb{R}^4$.

(a) Bestäm övergångsmatrisen från bas $\mathcal{W}$ till bas $\mathcal{V}$. **(3 p)**

(b) Låt $f\colon U \to U$ vara en linjär avbildning som uppfyller $[f]_{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Bestäm $[f]_{\mathcal{V}}$. **(3 p)**

(Med $[f]_{\mathcal{B}}$ menas matrisen för avbildningen f med avseende på basen $\mathcal{B}$.)

Lösningsförslag.

(a) Övergångsmatrisen från basen W till basen V ges av inversen till T

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Vi har

$$\begin{aligned} [f]_V = T^{-1}[f]_W T &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 17 & -8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4. En linjär avbildning $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras av formeln $L(\vec{x}) = \vec{e}_3 \times \vec{x}$ för alla vektorer $\vec{x}$. Här är $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och med $\times$ menas kryssprodukten.

(a) Bestäm standardmatris till $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. **(2 p)**

(b) L transformerar planet $x_3 = 0$ till sig själv. Beskriv geometrisk hur vektorer i detta plan transformeras. **(1 p)**

(c) Bestäm alla egenvärden och tillhörande egenvektorer till L. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Kryssprodukten beräknas och vi får

$$L(x) = \vec{e}_3 \times x = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Standardmatrisen ges då av hur L verkar på standardbasen i rummet

$$L(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad L(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad L(\vec{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och därmed är dess matris

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Avbildningen skickar alla vektorer till planet $x_3 = 0$, eftersom tredje komponenten i Lx är lika med noll. Vektorer i planet $x_3 = 0$ ges av $(x_1, x_2, 0)$ som avbildas på $(-x_2, x_1, 0)$ dvs (x_1, x_2) avbildas på $(-x_2, x_1)$ som tydligen är en rotation och vi kan skriva

$$\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

som är en rotation med $90°$, dvs $\pi/2$.

(c)

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda^2 + 1) = 0 \qquad \text{ger} \qquad \lambda = 0,$$

så L har bara ett egenvärde $\lambda = 0$. Det betyder att motsvarande egenvektorer ges av de nollskilda vektorerna i $\ker(L)$. Matrisen till L har rang 2, som ger att $\ker(L)$ har dimension 1. Vi kan konstatera att egenvektorer till L ges av $\alpha\vec{e}_3$ där α är en nollskild skalär.

5. Låt Q vara den kvadratiska form på $\mathbb{R}^{2n}$ som är definierad genom

$$Q(x_1, \ldots, x_{2n}) = x_1 x_{2n} + x_2 x_{2n-1} + \cdots + x_n x_{n+1}.$$

(a) Bestäm den symmetriska matrisen som tillhör Q. **(2 p)**

(b) Avgör karaktären av Q: positivt/negativt (semi)definit eller indefinit? **(4 p)**

Lösningsförslag.

(a) Symmetriska matrisen ges av:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dvs $A = (a_{ij})$, där $a_{ij} = 1/2$ för

$$(i, j) = (2n, 1), (2n-1, 2), (2n-2, 3), \cdots, (2, 2n-1), (1, 2n)$$

(b) Man kan enkelt konstatera att

$$4x_i x_j = [(x_i + x_j)^2 - (x_i - x_j)^2]$$

och att

$$4Q(x) = [(x_1 + x_{2n})^2 - (x_1 - x_{2n})^2] + \ldots. + [(x_n + x_{n+1})^2 - (x_n - x_{n+1})^2]$$

Dvs efter en rotation med ansatsen $y_1 = x_1 + x_{2n}$, ... $y_n = x_n + x_{n+1}$, samt $y_{n+1} = x_1 - x_{2n}$, ... $y_{2n} = x_n - x_{n+1}$, har vi att kvadratiska formen är indefinit, då den skrivs som

$$4Q(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \sum_{i=n+1}^{2n} y_i^2.$$

6. Låt A vara en $n \times n$-matris. $\mathrm{Col}(A)$ betecknar kolonnrummet av A. Visa:

(a) Om $\mathrm{Col}(A^k) = \mathrm{Col}(A^{k+1})$ för något heltal $k \geq 1$, så gäller $\mathrm{Col}(A^k) = \mathrm{Col}(A^{k+l})$ för alla heltal $l \geq 1$. **(3 p)**

(b) Om $A^j = 0$ för något heltal $j \geq 1$ så är $A^n = 0$. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Beteckna $W_0 = \mathrm{Col}(A^k)$ och $W_1 = \mathrm{Col}(A^{k+1})$. Enligt antagande gäller $W_1 = W_0$. Enligt definitionen för bildrummet,

$$W_1 = \mathrm{Col}(A^{k+1}) = \{A^{k+1}\vec{x}, \quad \vec{x} \in R^n\} = \{A(A^k\vec{x}), \quad \vec{x} \in R^n\} = \{A\vec{y}, \quad \vec{y} \in W_0\}.$$

Eftersom $W_1 = W_0$ har vi

(1) $$\{A\vec{y}, \quad \vec{y} \in W_0\} = W_0.$$

Nu bestämmer vi $\mathrm{Col}(A^{k+2})$:

$$\mathrm{Col}(A^{k+2}) = \{A(A^{k+1}\vec{x});\ \vec{x} \in R^n\} = \{A\vec{y};\ \vec{y} \in W_1\} \underset{W_1 = W_0}{=} \{A\vec{y};\ \vec{y} \in W_0\} \underset{(1)}{=} W_0.$$

Alltså $\mathrm{Col}(A^{k+2}) = W_0 = \mathrm{Col}(A^k)$.

På samma sätt

$$\mathrm{Col}(A^{k+3}) = \{A(A^{k+2}\vec{x});\ \vec{x} \in R^n\} = \{A\vec{y};\ \vec{y} \in \mathrm{Col}(A^{k+2})\} = \{A\vec{y};\ \vec{y} \in W_0\} \underset{(1)}{=} W_0.$$

Om vi forsätter med samma resonemang får vi att

$$\mathrm{Col}(A^{k+l}) = W_0 = \mathrm{Col}(A^k), \quad \text{V.S.B}$$

(b) Om $A^j = 0$ för något heltal $j \geq 1$ då är $A^{j+k} = A^k A^j = 0$ för varje $k = 0, 1, 2, \ldots$. Låt m vara minst av alla tal l sådana att $A^l = 0$. Då är $A^m = 0$ medan $A^{m-1} \neq 0$. Därför finns det en vektor $\vec{v}$ sådan att $A^{m-1}\vec{v} \neq \vec{0}$. Vi ska visa att följande vektorer $\vec{v}, A\vec{v}, A^2\vec{v}, \ldots, A^{m-1}\vec{v}$ är linjärt oberoende. Låt

(2) $$c_0\vec{v} + c_1 A\vec{v} + \cdots c_{m-1}A^{m-1}\vec{v} = \vec{0}$$

Vi multiplicerar ovanstående relation från vänster med A^{m-1}. Eftersom $A^l = 0$ för $l \geq m$ får vi $c_0 A^{m-1}\vec{v} = \vec{0}$. Detta och $A^{m-1}\vec{v} \neq \vec{0}$ medför $c_0 = 0$. Ekvationen (2) förenklas till

$$c_1 A\vec{v} + \cdots c_{n-1}A^{m-1}\vec{v} = \vec{0}.$$

Multiplikationen med A^{m-2} ger $c_1 = 0$. Fortsättning med samma resonemang ger $c_2 = 0, \ldots, c_{m-1} = 0$, som betyder att $\vec{v}, A\vec{v}, A^2\vec{v}, \ldots, A^{m-1}\vec{v}$ är m stycken linjärt oberoende vektorer i ett n-dimensionellt vektorrum. Därför $m \leq n$. Slutligen $A^n = A^m A^{n-m} = 0 \cdot A^{n-m} = 0$ V.S.B.