



KTH Datavetenskap
och kommunikation

DT1130 Spektrala transformeringar Tentamen 170112

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift maximalt ger 4 p. Normalt gäller följande betygsgränser: **E: 9 p, D: 11.5 p, C: 14 p, B: 16 p, A: 18 p**
Tillåtna hjälpmedel: räknare, formelblad (bifogat)

Lycka till!

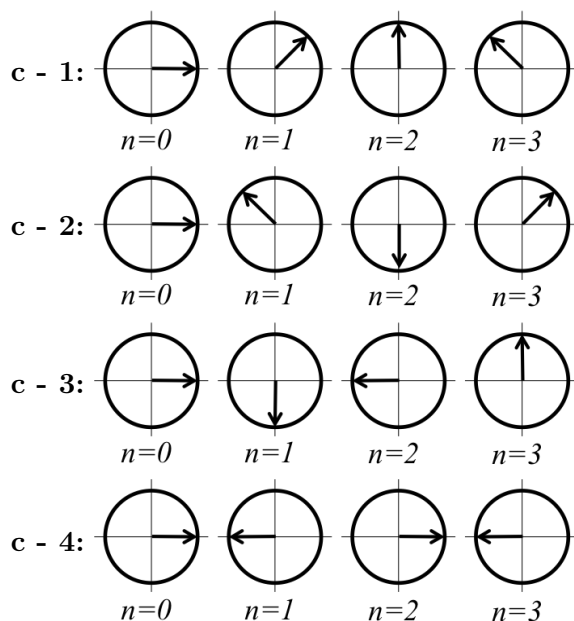
1

Signalen

$$x(t) = e^{j2\pi 1000t}$$

samplas med samplingsfrekvensen f_s , vilket resulterar i en ny signal $x(n)$.

- a Vad är lägsta möjliga värde på f_s om man vill undvika vikning? (1 p).
- b Vilka värden på f_s resulterar i att $x(n) = 1$ för alla värden på n ? (1 p).
- c Nedan visas fyra rader av fasdiagram i det komplexa talplanet. Varje rad beskriver de fyra första sampelns av $x(n)$.
Med vilket f_s har man samplat signalen i vart och ett av de fallen (dvs ett svar per rad önskas)? (2 p).



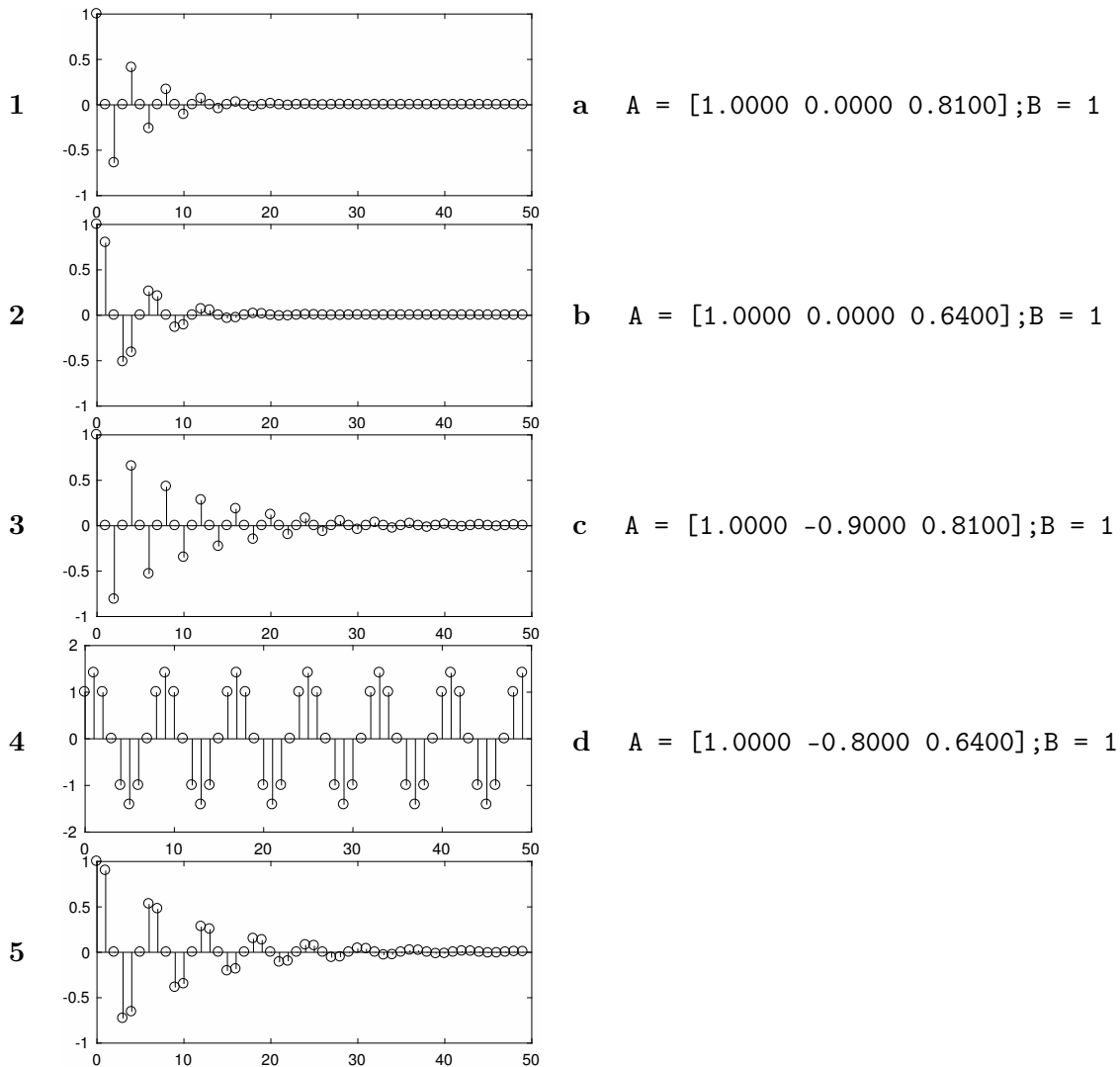


Figure 1. Vilken av signalerna till höger ska skickas till vilket filter till vänster för att utsignalen ska bli en impuls?

2

I figur 1 ser du ett antal olika impulssvar. För varje impulssvar till vänster finns en uppsättning filterkoefficienter A och B till höger (här givna i Matlab-notation) beskriver motsvarande filter.

Dessa ska paras ihop, med tydlig motivering! Observera att det blir ett impulssvar över.

(1p/ korrekt motiverat par)

3

Studera filtret

$$y(n) = x(n) - 0.81y(n-2)$$

a Ta fram ett uttryck för beloppet av filtrets frekvenssvar, dvs $|H(\omega)|$ och förenkla så långt det är möjligt! (2 p)

b Vid vilken vinkelfrekvens ω kommer filtret ha sin högsta resp. lägsta förstärkning? (1 p)

c Vilken typ av karakteristik har filtret?¹ (1 p)

4

Ett lågpasfilter H kan användas för att skapa en högpasfiltrerad bild genom att ta skillnaden mellan den ursprungliga bilden I och den lågpasfiltrerade.

a Detta kommer bara ge korrekt resultat om elementen i H summerar till noll. Varför? (1 p)

b Operationen kan skrivas matematiskt som

$$I - I * H$$

där $*$ betecknar faltning (med bibehållen matrisstorlek dvs resultatet av $I * H$ får samma dimension som I). Detta går i sin tur att skriva om till

$$I * (J - H)$$

Antag att H och J är 3×3 -matriser. Vad representerar matrisen J och vad innehåller den? (2 p)

c Antag nu att lågpasfiltret ges av

$$H = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ange då, med utgångspunkt i ovanstående, samt med hjälp av resonemanget i b, en 3×3 -matris som fungerar som ett högpasfilter. (1 p)

5

Ett 2:a ordningens återkopplat filter ges av $y(n) = x(n) - ay(n - 2)$. Detta filter kommer ha ett impulssvar som består av en sinusformad svängning vars amplitud gradvis klingar av. Bestäm a så att amplituden når 10% av sitt toppvärde efter 10 sampel. (4 p)

¹ex. vis lågpas, högpas, bandpass eller bandspärr

Lösningar

1

$$x(t) = e^{j2\pi 1000t}$$

beskriver en phasor med frekvensen $f = 1000$.

a

Sampling utan vikning kräver att $f_s \geq 2f$ alltså

$$f_s \geq 2000$$

b

Sampling med $f_s = \frac{1}{T_s}$: substituera

$$t = \frac{n}{f_s}$$

ger

$$x(n) = e^{j\frac{2\pi f n}{f_s}}$$

$x(n) = 1$ inträffar då $x(n) = e^{j2\pi k}$ där k är ett heltal.

Exponenterna i dessa två uttryck måste vara lika:

$$\frac{2\pi f n}{f_s} = 2\pi k \rightarrow \frac{f}{f_s} = k \rightarrow f_s = \frac{f}{k}$$

c-1

Figuren ger att $\omega = \frac{\pi}{4}$ rad/sampel

$$x(n) = e^{j\frac{\pi}{4}n} = e^{j\frac{2\pi f n}{f_s}} \rightarrow j\frac{\pi}{4}n = j\frac{2\pi f n}{f_s} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2f}{f_s} \rightarrow f_s = 8f = 8000$$

c-2

Samma resonemang som ovan men $\omega = \frac{3\pi}{4}$

$$\frac{3}{4} = \frac{2f}{f_s} \rightarrow f_s = \frac{8f}{3} \approx 2666$$

c-3

Samma resonemang som ovan men $\omega = \frac{3\pi}{2}$

$$\frac{3}{2} = \frac{2f}{f_s} \rightarrow f_s = \frac{4f}{3} \approx 1333$$

c-4

Samma resonemang som ovan men $\omega = \pi$

$$1 = \frac{2f}{f_s} \rightarrow f_s = 2f = 2000$$

4 (8)

2

Elementen i vektorerna A resp B motsvarar koefficienterna för z -termerna i överföringsfunktionens nämnare (A) resp täljare (B) enligt

$$H(z) = \frac{B(1)}{A(1) + A(2)z^{-1} + A(3)z^{-2}}$$

Beräkna poler och nollställen för de fyra överföringsfunktionerna:

a

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.81z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + 0.81}$$

Polerna fås genom att sätta nämnaren till noll:

$$z^2 + 0.81 = 0 \rightarrow z = \pm j0.9$$

Detta filter polvinkel $\frac{\pi}{2}$ och radie 0.9 och således ett impulssvar med perioden 4 sampel och långsam avklingning. Möjliga implussvar är 1 och 3.

b

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 + 0.64} \rightarrow z = \pm j0.8$$

Polvinkel $\frac{\pi}{2}$ och radie 0.8 och således lite snabbare avklingning än a. Därför måste b höra ihop med 1 (och a med 3).

c

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.9z + 0.81} \rightarrow z = 0.45 \pm \sqrt{0.45^2 - 0.81} = 0.45 \pm j0.7794$$

Polvinkel = $\frac{\pi}{3}$, radie = .9. Periodtiden är 6 sampel vilket stämmer med 2 och 5.

d

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.81z + 0.64} \rightarrow z = 0.4 \pm j0.6928$$

Polvinkel = $\frac{\pi}{3}$, radie = .8 - lite snabbare avklingning än c. Därför måste d och 2 höra ihop, samt c och 5.

3

Filtret

$$y(n) = x(n) - 0.81y(n-2)$$

har överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.81z^{-2}}$$

a

Filtrets frekvenssvar fås genom att substituera $z = e^{j\omega}$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + 0.81e^{-j2\omega}}$$

och beloppet $|H(\omega)| = \frac{1}{|1+0.81e^{-j2\omega}|}$

Nämnumaren i detta uttryck kan vi beräkna med pythagoras sats (kom ihåg att $|z| = \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}$)

$$|1 + 0.81(\cos(-2\omega) + j \sin(-2\omega))| = \sqrt{(1 + 0.81 \cos(2\omega))^2 + \sin^2(2\omega)} =$$

$$\sqrt{1 + 2 \cdot 0.81 \cos(2\omega) + 0.81^2 \cos^2(2\omega) + 0.81^2 \sin^2(2\omega)} = \sqrt{1 + 2 \cdot 0.81 \cos(2\omega) + (0.81)^2}$$

Återinsatt i ekvationen ovan får vi beloppet av frekvenssvaret:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \cdot 0.81 \cos(2\omega) + (0.81)^2}}$$

b

Detta uttryck kommer att ha sitt maximum när nämmnaren har sitt minimum, vilket är när cosinus-termen är som minst ($\cos\pi = -1$) dvs $2\omega = \pi$ dvs $\omega = \omega = \pi/2$.

Uttryckets minimum kommer omvänt när nämmnaren är som störst, dvs när cosinus är som störst ($\cos 0 = \cos 2\pi = 1$, dvs $\omega = 0$ samt $\omega = \pi$)

c

Frekvenssvaret har en topp på mitten vid $\omega = \frac{\pi}{2}$ och avtar för lägre och högre frekvenser. Filterkaraktistiken är således *bandpass*.

4

a

Om kärnan summerar till något annat än ett, kommer bildens ljusstyrka ändras vid filtreringen, och denna ändring kommer då dominera skillnaden mellan originalbild och filtrerad bild, så högpasseffekten uteblir.

b

$$I * (J - H) = I * J - I * H$$

detta uttryck ska vara identiskt med $I - I * H$, vilket innebär att $I = I * J$. Det betyder att J är en filterkärna som inte påverkar bilden, alltså en impuls.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c

Högpassfiltret beskrivs i enlighet med ovan som

$$J - H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

5

$$y(n) = x(n) - ay(n-2)$$

Impulssvaret ska enl. uppgift bli en svängning med avtagande amplitud. Vi söker ett uttryck för impulssvaret, vilket vi får genom att Z-transformera överföringsfunktionen.

$$y(n) + ay(n-2) = x(n)$$

$$Y(z)(1 + az^{-2}) = X(z)$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + az^{-2}} = \\ &= \frac{z^2}{z^2 + a} = \frac{z^2}{(z - ja)(z + ja)} \end{aligned}$$

Problem: detta är ett andragsuttryck och z-transform-tabellen i f.s. innehåller bara 1:a ordningens uttryck. För att kunna z-transformera detta uttryck m.h.j.a. tabellen i f.s. måste vi först dela upp $H(z)$ 1:a-ordningens termer m.h.j.a. partialbråksuppdelning (se f.s. sista sidan)

Ansätt:

$$\frac{z^2}{(z - ja)(z + ja)} = \frac{Az}{z - ja} + \frac{Bz}{z + ja}$$

Sätt på samma bråkstreck

$$\frac{Az(z + ja) + Bz(z - ja)}{(z - ja)(z + ja)} = \frac{Az^2 + jAz + Bz^2 - jBz}{(z - ja)(z + ja)}$$

Om detta uttryck ska bli $H(z)$ måste

$$Az^2 + jAz + Bz^2 - jBz = z^2$$

Identifiera termerna för varje gradtal. För z^2 :

$$A + B = 1$$

För z :

$$jA - jB = 0$$

Ur dessa ekvationer följer att $A = B = \frac{1}{2}$ och således kan vi skriva

$$H(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{z - ja} + \frac{1}{2} \frac{z}{z + ja}$$

Z-transform #4 från f.s.²

$$b^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-b}$$

Denna stämmer med termerna i $H(z)$ då $b = ja$ resp $b = -ja$. Termerna z-transformeras var för sig och resultatet sätts ihop till:

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2}(ja)^n u(n) + \frac{1}{2}(-ja)^n u(n) = \frac{1}{2}(j^n a^n + (-j)^n a^n)u(n) = \\ &= a^n \frac{e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{2} u(n) = a^n \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)u(n) \end{aligned}$$

Alltså en cosinussvängning med vinkelfrekvensen $\pi/2$ rad/sampel och en amplitud som avtar med a^n . Signalen är noll för alla $n < 0$ (tack vare stegfunktionen $u(n)$).

Vi söker ett värde på a så amplituden efter 10 sampel är 0.1 dvs

$$a^{10} = 0.1 \rightarrow a = 0.1^{-10} \approx 0.7943$$

²vi byter variabelbeteckning till b för att undvika sammanblandning med lokala variabler i uppgiften