KTH Datavetenskap
och kommunikation

DT1130 Spektrala transformer
Tentamen 170112

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift maximalt ger 4 p. Normalt gäller följande betygsgränser: **E: 9 p, D: 11.5 p, C: 14 p, B: 16 p, A: 18 p**
Tillåtna hjälpmedel: räknare, formelblad (bifogat)

Lycka till!

1

Signalen

$$x(t) = e^{j2\pi 1000t}$$

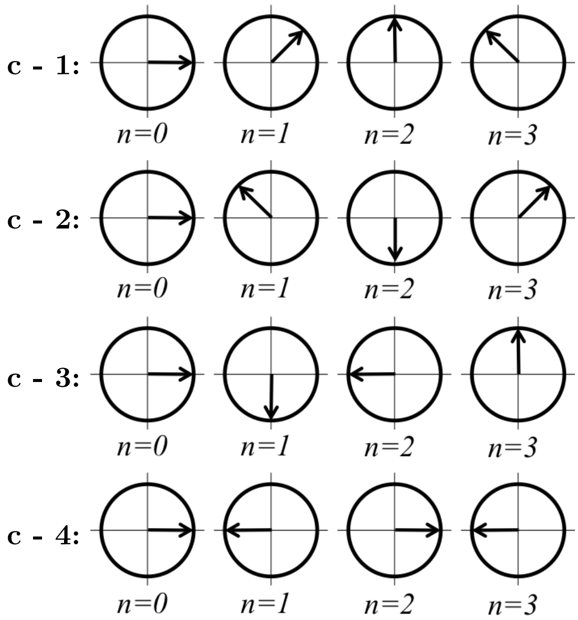
samplas med samplingsfrekvensen f_s, vilket resulterar i en ny signal $x(n)$.

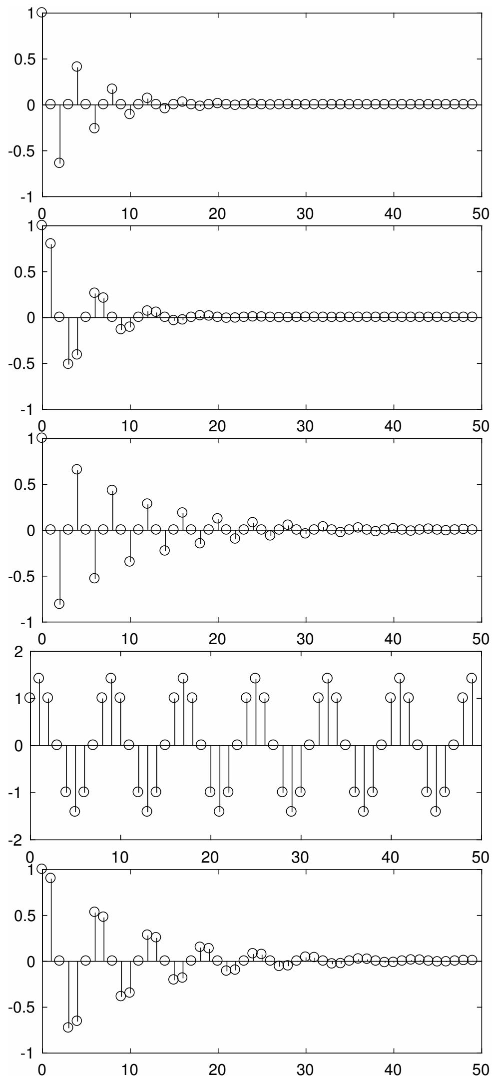
a Vad är lägsta möjliga värde på f_s om man vill undvika vikning? *(1 p)*.

b Vilka värden på f_s resulterar i att $x(n) = 1$ för alla värden på n? *(1 p)*.

c Nedan visas fyra rader av fasdiagram i det komplexa talplanet. Varje rad beskriver de fyra första samplen av $x(n)$.

Med vilket f_s har man samplat signalen i vart och ett av de fallen (dvs ett svar per rad önskas)? *(2 p)*.





1, 2, 3, 4, 5

a `A = [1.0000 0.0000 0.8100];B = 1`

b `A = [1.0000 0.0000 0.6400];B = 1`

c `A = [1.0000 -0.9000 0.8100];B = 1`

d `A = [1.0000 -0.8000 0.6400];B = 1`

Figur 1. Vilken av signalerna till höger ska skickas till vilket filter till vänster för att utsignalen ska bli en impuls?

2

I figur 1 ser du ett antal olika impulssvar. För varje impulssvar till vänster finns en uppsättning filterkoefficienter A och B till höger (här givna i Matlab-notation) beskriver motsvarande filter.

Dessa ska paras ihop, med tydlig motivering! Observera att det blir ett impulssvar över. *(1p/ korrekt motiverat par)*

3

Studera filtret

$$y(n) = x(n) - 0.81y(n-2)$$

a Ta fram ett uttryck för beloppet av filtrets frekvenssvar, dvs $|H(\omega)|$ och förenkla så långt det är möjligt! *(2 p)*

b Vid vilken vinkelfrekvens ω kommer filtret ha sin högsta resp. lägsta förstärkning? *(1 p)*

c Vilken typ av karakteristik har filtret?[1] *(1 p)*

4

Ett lågpassfilter H kan användas för att skapa en högpassfiltrerad bild genom att ta skillnaden mellan den ursprungliga bilden I och den lågpassfiltrerade.

a Detta kommer bara ge korrekt resultat om elementen i H summerar till noll. Varför? *(1 p)*

b Operationen kan skrivas matmatiskt som

$$I - I * H$$

där $*$ betecknar faltning (med bibehållen matrisstorlek dvs resultatet av $I * H$ får samma dimension som I). Detta går i sin tur att skriva om till

$$I * (J - H)$$

Antag att H och J är 3×3-matriser. Vad representerar matrisen J och vad innehåller den? *(2 p)*

c Antag nu att lågpassfiltret ges av

$$H = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ange då, med utgångspunkt i ovanstående, samt med hjälp av resonemanget i b, en 3×3-matris som fungerar som ett högpassfilter. *(1 p)*

5

Ett 2:a ordingens återkopplat filter ges av $y(n) = x(n) - ay(n-2)$. Detta filter kommer ha ett impulssvar som består av en sinusformad svängning vars amplitud gradvis klingar av. Bestäm a så att amplituden når 10% av sitt toppvärde efter 10 sampel. *(4 p)*

[1] ex. vis *lågpass*, *högpass*, *bandpass* eller *bandspärr*

Lösningar

1

$$x(t) = e^{j2\pi 1000t}$$

beskriver en phasor med frekvensen $f = 1000$.

a

Sampling utan vikning kräver att $f_s \geq 2f$ alltså

$$f_s \geq 2000$$

b

Sampling med $f_s = \frac{1}{T_s}$: substituera

$$t = \frac{n}{f_s}$$

ger

$$x(n) = e^{j\frac{2\pi f n}{f_s}}$$

$x(n) = 1$ inträffar då $x(n) = e^{j2\pi k}$ där k är ett heltal.
Exponenterna i dessa två uttryck måste vara lika:

$$\frac{2\pi f n}{f_s} = 2\pi k \rightarrow \frac{f}{f_s} = k \rightarrow f_s = \frac{f}{k}$$

c-1

Figuren ger att $\omega = \frac{\pi}{4}$ rad/sampel

$$x(n) = e^{j\frac{\pi}{4}n} = e^{j\frac{2\pi f n}{f_s}} \rightarrow j\frac{\pi}{4}n = j\frac{2\pi f n}{f_s} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2f}{f_s} \rightarrow f_s = 8f = 8000$$

c-2

Samma resonemang som ovan men $\omega = \frac{3\pi}{4}$

$$\frac{3}{4} = \frac{2f}{f_s} \rightarrow f_s = \frac{8f}{3} \approx 2666$$

c-3

Samma resonemang som ovan men $\omega = \frac{3\pi}{2}$

$$\frac{3}{2} = \frac{2f}{f_s} \rightarrow f_s = \frac{4f}{3} \approx 1333$$

c-4

Samma resonemang som ovan men $\omega = \pi$

$$1 = \frac{2f}{f_s} \rightarrow f_s = 2f = 2000$$

2

Elementen i vektorerna A resp B motsvarar koefficienterna för z-termerna i överföringsfunktionens nämnare (A) resp täljare (B) enligt

$$H(z) = \frac{B(1)}{A(1) + A(2)z^{-1} + A(3)z^{-2}}$$

Beräkna poler och nollställen för de fyra överföringsfunktionerna:

a

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.81z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + 0.81}$$

Polerna fås genom att sätta nämnaren till noll:

$$z^2 + 0.81 = 0 \to z = \pm j0.9$$

Detta filter polvinkel $\frac{\pi}{2}$ och radie 0.9 och således ett impulssvar med perioden 4 sampel och långsam avklingning. Möjliga implussvar är 1 och 3.

b

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 + 0.64} \to z = \pm j0.8$$

Polvinkel $\frac{\pi}{2}$ och radie 0.8 och således lite snabbare avklingning än a. Därför måste b höra ihop med 1 (och a med 3).

c

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.9z + 0.81} \to z = 0.45 \pm \sqrt{0.45^2 - 0.81} = 0.45 \pm j0.7794$$

Polvinkel $= \frac{\pi}{3}$, radie $=$ .9. Periodtiden är 6 sampel vilket stämmer med 2 och 5.

d

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.81z + 0.64} \to z = 0.4 \pm j0.6928$$

Polvinkel $= \frac{\pi}{3}$, radie $=$ .8 - lite snabbare avklingning än c. Därför måste d och 2 höra ihop, samt c och 5.

3

Filtret

$$y(n) = x(n) - 0.81y(n-2)$$

har överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.81z^{-2}}$$

a

Filtrets frekvenssvar fås genom att substituera $z = e^{j\omega}$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + 0.81e^{-j2\omega}}$$

och beloppet $|H(\omega)| = \frac{1}{|1+0.81e^{-j2\omega}|}$
Nämnaren i detta uttryck kan vi beräkna med pyhagoras sats (kom ihåg att $|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$)

$$|1 + 0.81(\cos(-2\omega) + j\sin(-2\omega))| = \sqrt{(1 + 0.81\cos(2\omega))^2 + \sin^2(2\omega)} =$$

$$\sqrt{1 + 2 \cdot 0.81\cos(2\omega) + 0.81^2\cos^2(2\omega) + 0.81^2\sin^2(2\omega)} = \sqrt{1 + 2 \cdot 0.81\cos(2\omega) + (0.81)^2}$$

Återinsatt i ekvationen ovan får vi beloppet av frekvenssvaret:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \cdot 0.81\cos(2\omega) + (0.81)^2}}$$

b

Detta uttryck kommer att ha sitt maximum när nämnaren har sitt minimum, vilket är när cosinus-termen är som minst ($cos\pi = -1$) dvs $2\omega = \pi$ dvs $\omega = \omega = \pi/2$.

Uttryckets minimum kommer omvänt när nämnaren är som störst, dvs när cosinus är som störst ($\cos 0 = \cos 2\pi = 1$, dvs $\omega = 0$ samt $\omega = \pi$

c

Frekvenssvaret har en topp på mitten vid $\omega = \frac{\pi}{2}$ och avtar för lägre och högre frekvenser. Filterkarakteristiken är således *bandpass*.

4

a

Om kärnan summerar till något annat än ett, kommer bildens ljusstyrka ändras vid filtreringen, och denna ändring kommer då dominera skillnaden mellan originalbild och filtrerad bild, så högpasseffekten uteblir.

b

$$I * (J - H) = I * J - I * H$$

detta uttryck ska vara identiskt med $I - I * H$, vilket innebär att $I = I * J$. Det betyder att J är en filterkärna som inte påverkar bilden, alltså en impuls.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c

Högpassfiltret beskrivs i enlighet med ovan som

$$J - H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

5

$$y(n) = x(n) - ay(n-2)$$

Impulssvaret ska enl. uppgift bli en svängning med avtagande amplitud. Vi söker ett uttryck för impulssvaret, vilket vi får genom att Z-transformera överföringsfunktionen.

$$y(n) + ay(n-2) = x(n)$$

$$Y(z)(1 + az^{-2} = 1$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + az^{-2}} =$$

$$= \frac{z^2}{z^2 + a} = \frac{z^2}{(z - ja)(z + ja)}$$

Problem: detta är ett andragradsuttrck och z-transform-tabellen i f.s. innehåller bara 1:a ordningens uttryck. För att kunna z-transformera detta uttryck m.hj.a. tabellen i f.s. måste vi först dela upp $H(z)$ 1:a-ordningens termer m.hj.a. partialbråksuppdelning (se f.s. sista sidan)

Ansätt:

$$\frac{z^2}{(z - ja)(z + ja)} = \frac{Az}{z - ja} + \frac{Bz}{z + ja}$$

Sätt på samma bråkstreck

$$\frac{Az(z + ja) + Bz(z - ja)}{(z - ja)(z + ja)} = \frac{Az^2 + jAz + Bz^2 - jBz}{(z - ja)(z + ja)}$$

Om detta uttryck ska bli $H(z)$ måste

$$Az^2 + jAz + Bz^2 - jBz = z^2$$

Identifiera termerna för varje gradtal. För z^2:

$$A + B = 1$$

För z:

$$jA - jB = 0$$

Ur dessa ekvationer följer att $A = B = \frac{1}{2}$ och således kan vi skriva

$$H(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z - ja} + \frac{1}{2}\frac{z}{z + ja}$$

Z-transform #4 från f.s.[2]

$$b^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-b}$$

Denna stämmer med termerna i $H(z)$ då $b = ja$ resp $b = -ja$. Termerna z-transformeras var för sig och resultatet sätts ihop till:

$$h(n) = \frac{1}{2}(ja)^n u(n) + \frac{1}{2}(-ja)^n u(n) = \frac{1}{2}(j^n a^n + (-j)^n a^n)u(n) =$$

$$= a^n \frac{e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{2} u(n) = a^n \cos(\frac{\pi}{2}n)u(n)$$

Alltså en cosinussvängning med vinkelfrekvensen $\pi/2$ rad/sampel och en amplitud som avtar med a^n. Signalen är noll för alla $n < 0$ (tack vare stegfunktionen $u(n)$).

Vi söker ett värde på a så amplituden efter 10 sampel är 0.1 dvs

$$a^{10} = 0.1 \rightarrow a = 0.1^{\frac{1}{10}} \approx 0.7943$$

[2] vi byter variabelbeteckning till b för att undvika sammanblandning med lokala variabler i uppgiften