Formler för elvåg

Ulf Lundström
med mindre tillägg av Ilian Häggmark

20 januari 2017

Detta dokument innehåller användbara formler och ekvationer för kursen SK1110 Elektromagnetism och vågrörelselära . Det innehåller långt i från allt i kursen men många av de mest användbara formlerna. Formlerna är de som jag gått igenom på övningarna för att lösa övningstalen och är därför uppdelade efter vilken övning de först används på.

Innehåll

Konstanter och enheter

Fysikaliska konstanter

Ljushastigheten	$c = 299792458$ m/s
elektriska konstanten	
(permittiviteten för vakuum)	$\epsilon_0 = 8.8541 \cdot 10^{-12}$ F/m
magnetiska konstanten	
(permeabiliteten för vakuum)	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
Elementarladdningen	$e = 1.6022 \cdot 10^{-19}$ C
Elektronmassan	$m_\mathrm{e} = 9.1094 \cdot 10^{-31}$ kg
Atommassenhet	$1\ \mathrm{u} = 1.6605 \cdot 10^{-27}$ kg
överslagsfält i luft	$E_\mathrm{B} = 2$ MV/m
Ljudhastighet i luft	$v_\mathrm{luft} = 340$ m/s
Ljudhastighet i vatten	$v_\mathrm{vatten} = 1500$ m/s
Densiteten för luft	$\rho_\mathrm{luft} = 1.2$ kg/m^3
Densiteten för vatten	$\rho_\mathrm{vatten} = 1000$ kg/m^3
Resistivitet för koppar	$\rho_\mathrm{Cu} = 1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\ \mathrm{m}^2/\mathrm{m}$
Våglängd för blått ljus	$\lambda_\mathrm{b} = 450$ nm
Våglängd för grönt ljus	$\lambda_\mathrm{g} = 550$ nm
Våglängd för rött ljus	$\lambda_\mathrm{r} = 650$ nm

SI-enheter

Storhet	**Enhet**	**Symbol och uttryck**
Längd	meter	m
Massa	kilogram	kg
Tid	sekund	s
Elektrisk ström	ampere	A
Temperatur	kelvin	K
Substansmängd	mol	mol
Ljusstyrka	candela	cd
Vinkel	radian	$\mathrm{rad} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}^{-1}$
Rymdvinkel	steradian	$\mathrm{sr} = \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^{-2}$
Frekvens	hertz	$\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$
Kraft	newton	$\mathrm{N} = \mathrm{m\ kg\ s}^{-2}$
Tryck, spänning	pascal	$\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m}^2 = \mathrm{m}^{-1}\ \mathrm{kg\ s}^{-2}$
Energi	joule	$\mathrm{J} = \mathrm{N\ m} = \mathrm{m}^2\ \mathrm{kg\ s}^{-2}$
Effekt	watt	$\mathrm{W} = \mathrm{J/s} = \mathrm{m}^2\ \mathrm{kg\ s}^{-3}$
Laddning	coulomb	$\mathrm{C} = \mathrm{s\ A}$
Spänning	volt	$\mathrm{V} = \mathrm{W/A} = \mathrm{m}^2\ \mathrm{kg\ s}^{-3}\ \mathrm{A}^{-1}$
Kapacitans	farad	$\mathrm{F} = \mathrm{C/V} = \mathrm{m}^{-2}\mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^4\ \mathrm{A}^2$
Resistans	ohm	$\Omega = \mathrm{V/A} = \mathrm{m}^2\ \mathrm{kg\ s}^3\ \mathrm{A}^{-2}$
Konduktans	siemens	$\mathrm{S} = \mathrm{A/V} = \mathrm{m}^{-2}\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}\ \mathrm{A}^2$
Magnetiskt flöde	weber	$\mathrm{Wb} = \mathrm{V\ s} = \mathrm{m}^2\ \mathrm{kg\ s}^{-2}\ \mathrm{A}^{-1}$
Magnetisk flödestäthet	tesla	$\mathrm{T} = \mathrm{Wb/m}^2 = \mathrm{kg\ s}^{-2}\ \mathrm{A}^{-1}$
Induktans	henry	$\mathrm{H} = \mathrm{Wb/A} = \mathrm{m}^2\ \mathrm{kg\ s}^{-2}\ \mathrm{A}^{-2}$

Övning 1: Akustik

Harmonisk våg , förskjutning

$$s(x,t) = s_0 \sin(kx - \omega t)$$

- s_0 [m] förskjutningsamplitud
- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ [rad/m] vågtal
- $\omega = 2\pi f$ [rad/s] vinkelfrekvens
- $v = \frac{\omega}{k} = \lambda f$ [m/s] våghastighet

Intensitet är effekt per yta,

$$I = \frac{P}{A} \quad [\mathrm{W/m^2}], \tag{1.1}$$

där P är effekten och A är arean den är spridd över. För ljudvåg gäller

$$I = \frac{1}{2} a^2 \omega^2 Z = \frac{p_{\max}^2}{2Z}, \tag{1.2}$$

där $p_{\max}$ [Pa=N/m^2] är tryckamplituden, $Z = \rho v$ [kg/(m^{2}s)] är den akustiska impedansen och ρ [kg/m^3] är densiteten hos materialet. Luft har $Z_{\text{luft}} \approx 420$ kg/(m^{2}s) och vatten $Z_{\text{vatten}} \approx 1.5 \cdot 10^6$ kg/(m^{2}s). $K = vZ$ är kompressionsmodulen.

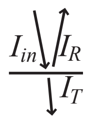
Ljudintensitetsnivå är en logaritmisk skala för intensitet,

$$\beta = \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \cdot 10 \text{ dB, där } I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2. \tag{1.3}$$

Reflektivitet är andelen av en ljudvåg som reflekteras vid infall mot en gränsyta mellan två material.

$$R = \frac{I_R}{I_{\text{in}}}, \tag{1.4}$$

där I_{in} är infallande intensitet och I_R är reflekterad intensitet. För vinkelrätt infallande ljud gäller



$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2, \tag{1.5}$$

där Z_1 och Z_2 är de akustiska impedanserna hos de två materialen.

Svävning är ett interferensfenomen där två toner uppfattas som en ny ton vars intensitet varierar periodiskt. Om de ursprungliga tonerna har frekvenserna f_a och f_b ges svävningsfrekvensen av

$$f_{\text{sv}} = f_a - f_b \tag{1.6}$$

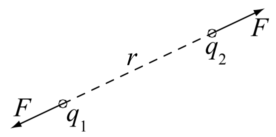
och bärvågens frekvens av

$$f_{\text{c}} = \frac{1}{2}(f_a + f_b) \tag{1.7}$$

Övning 2: Elektrostatik

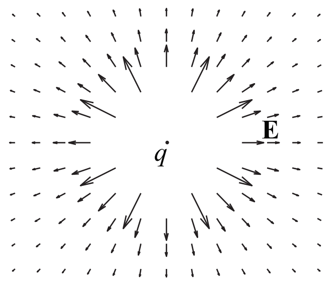
Coulombs lag säger att kraften F mellan två laddningar q_1 och q_2 [C] på avstånd r ges av

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad [\mathrm{N}], \tag{2.1}$$



där $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ $\mathrm{C}^2/(\mathrm{Nm}^2)$ är den elektriska konstanten (permittiviteten hos vakuum).

Elektriskt fält E [N/C=V/m] på avstånd r från en laddning ges nedan för några vanliga laddningsfördelningar.



- punktladdning q [C]:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{2.2}$$

- linjeladdning λ [C/m]:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \tag{2.3}$$

- ytladdning σ [C/m^2]:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ (oberoende av avstånd)} \tag{2.4}$$

Fomlerna för linje- och ytladdning gäller på avstånd r mycket mindre än längden på linjen eller ytan.

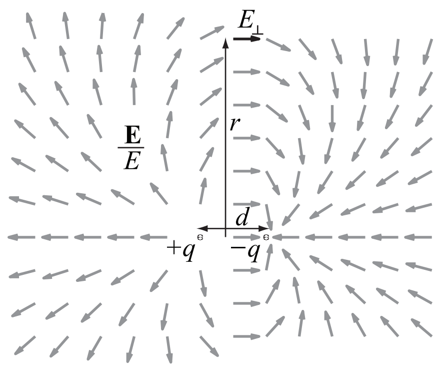
Superpositionsprincipen säger att det totala elektriska fältet är summan av de individuella elektriska fälten från alla närvarande laddningar.

En elektrisk dipol består av två laddningar q och $-q$ förskjutna ett litet avstånd **d**. Den har ett dipolmoment

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d} \quad [\mathrm{Cm}]. \tag{2.5}$$

Det elektriska fältet på ett avstånd $r \gg d$ vinkelrätt mot d är

$$E_\perp = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \tag{2.6}$$



Elektrisk kraft på en laddning q ges av

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \tag{2.7}$$

där **E** är det yttre elektriska fältet vid laddningen. (En variabel med fet stil är en vektor och har därmed både storlek och riktning. För hand skrivs det normalt med ett streck eller pil över bokstaven, $\mathbf{E} = \bar{E} = \vec{E}$. Samma variabel utan fet stil betecknar absolutbeloppet av vektorn, $E = |\mathbf{E}|$.)

Gauss sats säger att

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \tag{2.8}$$

där Q är laddningen innesluten av ytan S.

Elektriskt ledande material får en ytladdning som gör det totala elektriska fältet till 0 i materialet.

Elektrisk potential U [V] i en punkt a definieras utifrån

$$U_a = -\int_p^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad [\mathrm{V}], \tag{2.9}$$

där p kan väljas fritt ($U_p = 0$), t.ex. i jord eller oändligheten.

Spänning U_{ab} är skillnad i elektrisk potential mellan punkterna a och b,

$$U_{ab} = U_b - U_a = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad [\mathrm{V}], \tag{2.10}$$

där integralen är oberoende av väg från a till b.

Potentiell energi hos en laddning q på potential U är den energi som krävs för att flytta laddningen från potential 0 till potential U,

$$W = qU \quad [\mathrm{J}]. \tag{2.11}$$

Övning 3: Kondensatorer

Kondensatorn är en elektrisk komponent som kan lagra laddning Q och energi W när man lägger en spänning U över den.

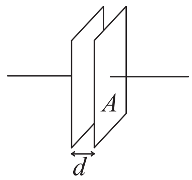
$$Q = CU \tag{3.1}$$

$$W = \frac{1}{2}CU^2 \tag{3.2}$$

där C $\left[\mathrm{F} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}\right]$ är kapacitansen hos kondensatorn.

Plattkondensatorn består av två elektriskt ledande plattor av area A på avstånd d och har kapacitans

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}, \tag{3.3}$$

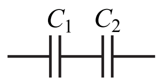


där ϵ_r är den relativa permitiviteten hos materialet mellan plattorna och $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m är den elektriska konstanten. Mellan plattorna är det elektriska fältet

$$E = \frac{U}{d} \tag{3.4}$$

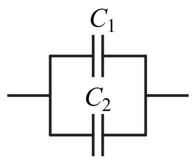
Seriekoppling av kondensatorer med kapacitans C_1 och C_2 ger kapacitans

$$\frac{1}{C_{\text{serie}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{3.5}$$



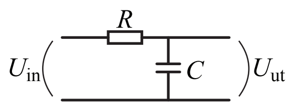
Parallellkoppling av kondensatorer med kapacitans C_1 och C_2 ger kapacitans

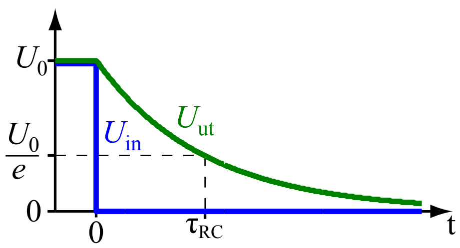
$$C_{\text{parallell}} = C_1 + C_2 \tag{3.6}$$



RC-kretsen: Urladdning av en kondensator med kapacitans C över en resistans R sker med en tidskonstant $\tau_{RC} = RC$. Spänningen över kondensatorn sjunker som

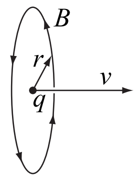
$$U(t) = U_0 e^{-t/\tau_{RC}} \tag{3.7}$$





Övning 4: Magnetism

Magnetfältet från laddning q med hastighet $\mathbf{v}$ är



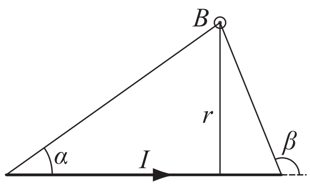
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad [\mathrm{T}], \quad \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}, \qquad (4.1)$$

där $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ är riktningsvektorn ($|\hat{\mathbf{r}}| = 1$) från q, r är avståndet och μ_0 är den magnetiska konstanten eller permeabiliteten hos vakuum.

Magnetfältet från lång rak ledare med ström I är på avstånd r

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (4.2)$$

Magnetfältet från rak ledare är

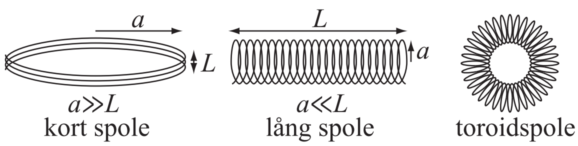


$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\alpha - \cos\beta) \qquad (4.3)$$

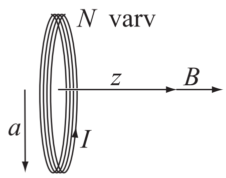
Lång spole (solenoid) och toroidspole har i spolen magnetfältet

$$B = \mu_0 I\frac{N}{L}, \qquad (4.4)$$

där $\frac{N}{L}$ är antalet varv per längd.

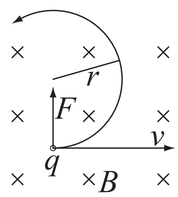


Kort spole har längs symetriaxeln (z) magnetfältet



$$B = \frac{N\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}} \qquad (4.5)$$

Magnetfält: En laddning q med hastighet $\mathbf{v}$ i ett magnetfält $\mathbf{B}$ [T=Ns/(Cm)] utsätts för en kraft



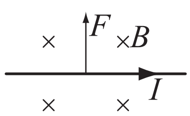
$$\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B} \qquad (4.6)$$

Detta ger upphov till en cirkulär rörelsebana med krökningsradie

$$R = \frac{mv}{|q|B}, \qquad (4.7)$$

där m är massan på partikeln.

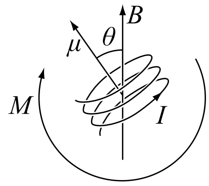
En rak ledare av längd l med ström I utsätts på samma sätt av en kraft



$$\mathbf{F} = I\mathbf{l}\times\mathbf{B} \qquad (4.8)$$

Magnetisk dipol: En strömslinga (t.ex. spole) med area A, N varv och ström I har ett magnetisk dipolmoment

$$\mu = NIA, \tag{4.9}$$



med riktning vinkelrätt ut från ytan i det skapade magnetfältets riktning. Observera att symbolen μ använd både som magnetisk dipolmoment och permeabilitet.
I ett yttre magnetfält $\mathbf{B}$ utsätts dipolen för ett kraftmoment

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (M = \mu B \sin\theta) \tag{4.10}$$

Övning 5: Induktion

Magnetiska flödet genom en area $\mathbf{A}$ med konstant magnetfält $\mathbf{B}$ är

$$\Phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta \quad [\mathrm{Wb} = \mathrm{Vs} = \mathrm{Tm}^2], \tag{5.1}$$

där θ är vinkeln mellan magnetfältet och ytans normal.

Inducerade spänningen i en spole (krets) ges av

$$U = N\frac{d\Phi}{dt} \quad [\mathrm{V}], \tag{5.2}$$

där N är antalet varv i spolen och $\frac{d}{dt}$ är tidsderivata.

Självinduktansen hos en krets (spole) är

$$L = N\frac{\Phi}{I} \quad [\mathrm{H} = \mathrm{Wb/A}]. \tag{5.3}$$

Ömsesidiga induktansen mellan två spolar är

$$M = N_1\frac{\Phi_1}{I_2} \quad [\mathrm{H}], \tag{5.4}$$

där flödet Φ_1 och strömmen I_2 mäts i olika spolar.

RL-kretsen. Spolar är tröga. Vid inkoppling ökar strömmen enligt

$$I = I_0\left(1 - e^{-t/\tau_{RL}}\right). \tag{5.5}$$

Vid urkoppling sjunker strömmen enligt

$$I = I_0 e^{-t/\tau_{RL}}, \tag{5.6}$$

förutsatt att strömmen kan gå genom en resistans R. Tidskonstanten $\tau_{RL} = L/R$ och slutströmmen ges av Ohms lag $I_0 = U/R$.

LRC-kretsen. Resonansfrekvensen ges av

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{5.7}$$

Övning 6: Geometrisk optik

Brytningsindex hos ett material är

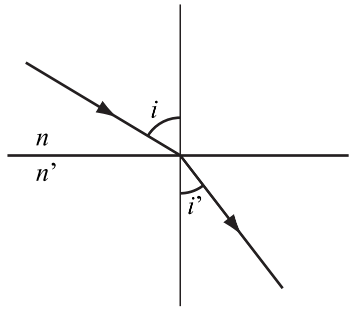
$$n = \frac{c}{v}, \tag{6.1}$$

där $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s är ljushastigheten i vakuum och v är ljushastigheten i mediet. Detta gör att våglängden i materialet blir $\lambda = \lambda_0/n$ där λ_0 är våglängden i vakuum.

Snells lag säger att

$$n \sin i = n' \sin i', \tag{6.2}$$

där n och n' är brytningsindex på två sidor om en gränsyta och i och i' är ljusets vinklarna mot normalen på de två sidorna om ytan.



Totalreflektion uppstår om det inte finns någon lösning till Snells lag, eller ekvivalent om

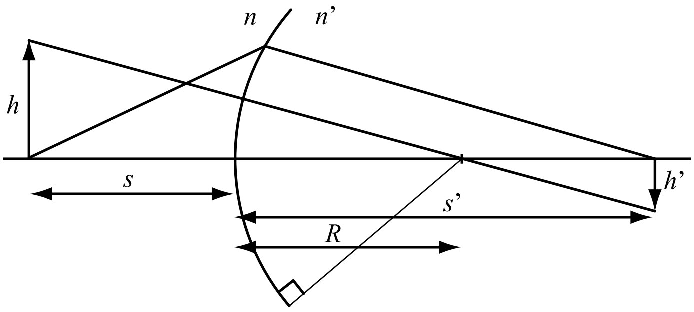
$$i > i_c = \sin^{-1} \frac{n'}{n} \tag{6.3}$$

Avbildning i sfärisk gränsyta : objektsavstånd s förhåller sig till bildavstånd s' enligt följande formel.

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n' - n}{R}, \tag{6.4}$$

där R är krökningsradien på ytan. Förstoringen blir

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{ns'}{n's} \tag{6.5}$$



Avbildning i tunn lins :

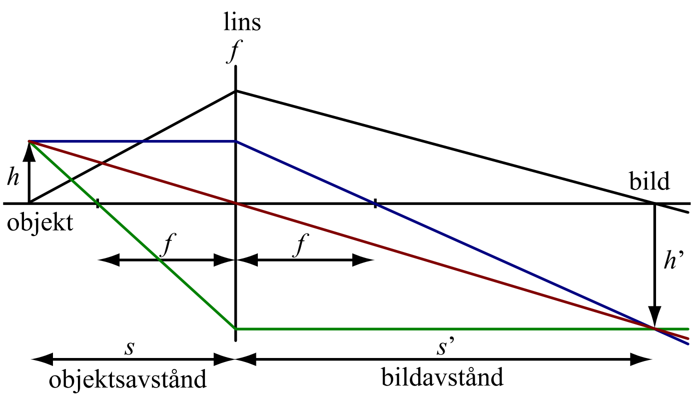
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}, \tag{6.6}$$

där f är fokallängden på linsen,

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{6.7}$$

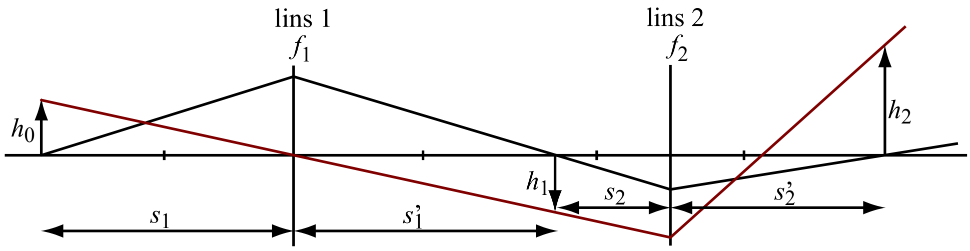
Förstoringen ges av

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{s'}{s}. \tag{6.8}$$



Övning 7: Optiska system

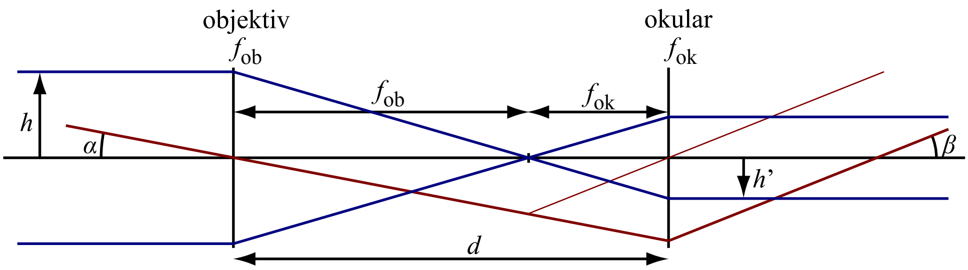
Linssystem kan behandlas genom avbildning i en lins i taget.



$$\frac{1}{s_i} + \frac{1}{s'_i} = \frac{1}{f_i}, \quad h_i = \frac{s'_i}{s_i} h_{i-1} \tag{7.1}$$

Teleskop (afokala system) uppfyller att objekt i ∞ ger bild i ∞, vilket är ekvivalent med att parallella strålar som kommer in i systemet är parallella efter systemet. För ett tvålinssytem (ett objektiv och ett okular) innebär detta att linsavståndet är

$$d = f_{\text{ob}} + f_{\text{ok}}. \tag{7.2}$$



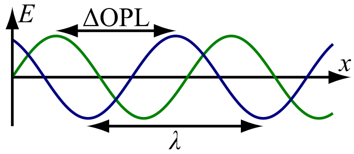
Vinkelförstoringen ges av

$$M_\alpha = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{h}{h'} = -\frac{f_{\text{ob}}}{f_{\text{ok}}} \tag{7.3}$$

Övning 8: Interferens

Optisk väg (optical path length) är sträckan ljuset färdas viktat med brytningsindex i det medium det färdas,

$$\mathrm{OPL} = nx. \tag{8.1}$$



Vid flera olika material läggs de optiska vägarna för alla delsträckor ihop.

Fasskillnad mellan två ljusstrålar med samma ursprung säger hur mycket de har blivit förskjutna relativt varandra när de återförenas,

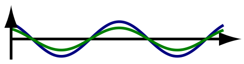
$$\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta\mathrm{OPL}}{\lambda}. \tag{8.2}$$

Interferens mellan två strålar kan ske om de kommer från samma källa. E-fälten adderas vilket ger en total intensitet

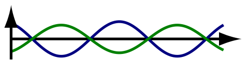
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\phi), \tag{8.3}$$

där I_1 och I_2 intensiteterna hos stråle 1 och 2 och $\Delta\phi$ fasskillnaden mellan dem.

Maximal konstruktiv interferens inträffar då $\Delta\mathrm{OPL} = m\lambda$ eller ekvivalent $\Delta\phi = 2\pi m$ för $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

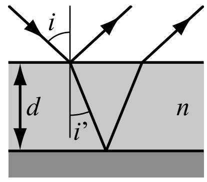


Maximal destruktiv interferens inträffar då $\Delta\mathrm{OPL} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ eller ekvivalent $\Delta\phi = 2\pi m + \pi$ för $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.



Tunnt skikt av tjocklek d och brytningsindex n ger en optisk vägskillnad

$$\Delta\mathrm{OPL} = 2nd\cos(i') + \begin{cases} \lambda/2 & \text{om } \textit{en} \text{ av reflektionerna är mot tätare medium} \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \tag{8.4}$$



mellan ljus som reflekterats från den första och den andra ytan, där i' är transmissionsvinkeln för första ytan.

Vinkelrät reflektion i gränsyta ger en reflektivitet

$$R = \frac{I_R}{I_i} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2, \tag{8.5}$$

där n_1 och n_2 är brytningsindex för de två materialen. Brytningsindex för AR-skikt väljs optimalt som

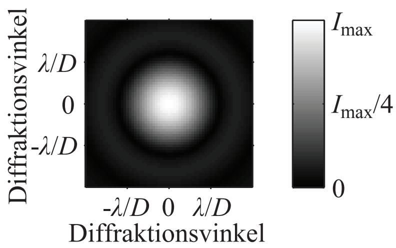
$$n_{\mathrm{AR}} = \sqrt{n_1 n_2} \tag{8.6}$$

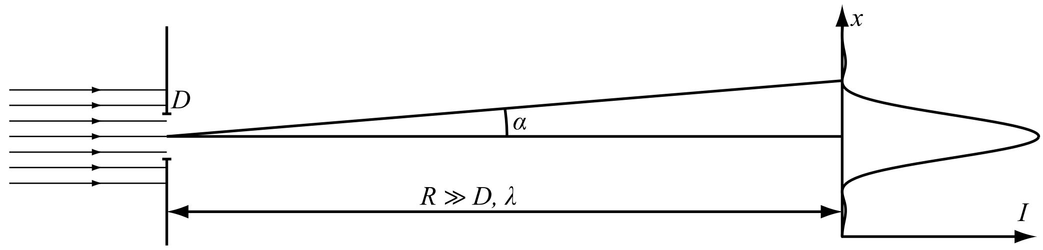
Övning 9: Diffraktion och polarisation

Cirkulär öppning (t.ex. lins) ger diffraktion,

$$\sin \alpha = \frac{1.22\lambda}{D}, \tag{9.1}$$

där α är diffraktionsvinkeln till första minimum, λ är våglängden och D är hålets diameter.





Enkelspalt ger ganska likt diffraktionsmönster, men bara i en rikting.

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{a}, \tag{9.2}$$

där a är spaltbredden.

Upplösning: Vinkeln α_{R} som går att upplösa enligt Rayleighkriteriet ges av

$$\sin \alpha_R = \frac{1.22\lambda}{D} \tag{9.3}$$

Gitter får diffraktionsmönster med hög intensitet bara i bestämda riktningar (ordningar). Vinkeln α_m till ordning m ges av

$$m\lambda = d \sin \alpha_m, \tag{9.4}$$

där d är gitterkonstanten (spaltseparationen). Intensiteten i varje maxima ges av diffraktionen i den riktningen för varje enskild spalt.

Polarisation på ljus är riktningen som det elektriska fältet varierar i.

Malus lag säger att hur mycket av linjärpolariserat ljus som kommer igenom ett polarisationsfilter beror av vinkeln ϕ mellan polarisationsriktningen och genomsläppsriktningen enligt

$$I = I_{\max} \cos^2 \phi \tag{9.5}$$

Brewstervinkeln: Mängden ljus som reflekteras i en övergång från brytningsindex n till n' beror på infallsvinkeln, och polarisationen. I Brewstervinkeln i_B reflekeras bara polarisationen vinkelät mot infallsplanet.

$$i_\mathrm{B} = \tan^{-1}\left(\frac{n'}{n}\right) \tag{9.6}$$