Lösningsförslag till Kompletteringstentamen, SF1633, Differentialekvationer I den 24 januari 2017 kl. 17 - 19.

Varje moduluppgift består av tre frågor. För att bli godkänd på modulen krävs rätt svar på minst två av dessa frågor. Gör endast den moduluppgift (en uppgift) som saknas från tentamen/lappskrivningar.
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen *BETA: Mathematics Handbook* av Råde och Westergren.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och väl motiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt. Samtliga svar ska vara på reell form.

Modul 2. a) Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X.$$

(Tips: verifiera att lösningen är korrekt.)

b) Bestäm den allmänna lösningen till det inhomogena systemet

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Verifiera, genom insättning i systemet, att svaret som erhållits i b) verkligen uppfyller det givna systemet.

Lösning: a) Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

har egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$, med motsvarande egenvektorer $v_1 = \binom{1}{0}$ och $v_2 = \binom{1}{1}$. Således ges den allmänna lösningen till systemet av

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

där c_1, c_2 är konstanter.

b) Vi söker en partikulärlösning X_p och väljer metoden variation av parametrar. Från a) får vi att

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

är en fundamentalmatris till det homogena systemet. Således vet vi att $X_p = \Phi(t)U(t)$ är en partikulärlösning till det inhomogena systemet i b) om U uppfyller

$$U'(t) = \Phi^{-1}(t) \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Således är $U(t) = \binom{t+a}{b}$, där a och b är konstanter. Eftersom vi endast söker en partikulärlösning kan vi välja $a = b = 0$. Alltså,

$$X_p = \Phi(t)\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

är en partikulärlösning. Således är

$$X = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

den allmänna lösningen till systemet.

c) Vi verifierar att svaret i b) verkligen är en lösning. Vi har

$$X' = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t - c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} te^t + e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

och

$$AX + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left(c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$\left(c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t - c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser att $X' = AX + \binom{e^t}{0}$, dvs svaret i b) är verkligen en lösning.

Modul 3. Funktionen $y(t)$ uppfyller ekvationen

$$y(t) + 2\int_0^t \cos(t-u)y(u)du = 1.$$

Uppgiften går ut på att använda Laplacetransform för att bestämma $y(t)$. I uppgift a) ska man också visa att man kan använda Laplactransformens definition.

a) Använd Laplacetransformens definition för att bestämma Laplacetransformen $\mathscr{L}\{f(t)\}$ då $f(t) = 1$. (Alltså, beräkna Laplacetransformen till den konstanta funktionen $f(t) = 1$ genom att använda definitionen och presentera räkningarna.)

b) Bestäm $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$. Förenkla svaret så långt som möjligt.

c) Använd resultatet från b) för att bestämma $y(t)$.

Lösning: a) (Se exempel 1, Kap 7.1 i kursboken) Enligt definition har vi

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{M\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^M = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-sM}}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

om $s > 0$. Således, $\mathscr{L}\{f(t)\} = 1/s$ (vilket också stämmer med formel L20, sid 332, i Beta).

b) Vi ser att den givna ekvationen innehåller en faltning, och att vi kan skriva ekvationen på formen

$$y(t) + 2(g * y)(t) = 1$$

där $g(t) = \cos t$. Laplacetransformering ger därför

$$Y(s) + 2\frac{s}{s^2+1}Y(s) = \frac{1}{s}.$$

Här har vi utnyttjat formlerna L12 och L25 i Beta. Eftersom

$$Y(s) + 2\frac{s}{s^2+1}Y(s) = Y(s)(1 + \frac{2s}{s^2+1}) = Y(s)\frac{s^2+2s+1}{s^2+1} = Y(s)\frac{(s+1)^2}{s^2+1}$$

får vi att

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s(s+1)^2}.$$

c) Vi söker nu $y(t)$. Från b) har vi att

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s(s+1)^2} = \frac{s}{(s+1)^2} + \frac{1}{s(s+1)^2}.$$

Använder vi nu formlerna L23 och L33 fås

$$y(t) = (1-t)e^{-t} + (1 - e^{t} - te^{-t}) = 1 - 2te^{-t}.$$

Lycka till!