KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
måndag, 13 mars 2017

Skrivtid: 08:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst tre poäng.

DEL A

1. Betrakta vektorerna $\vec{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{Q} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Låt l_1 vara linjen som går genom $\vec{P}$ och $\vec{Q}$ och låt l_2 vara linjen som är parallell med $\vec{u}$ och som går genom $\vec{P}$.

(a) Bestäm parameterframställningar till linjerna l_1 och l_2. **(3 p)**

(b) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller linjerna l_1 och l_2. **(3 p)**

2. Betrakta följande matris:

$$A(t) = \begin{bmatrix} t & 1 & 10-t \\ 1 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & t \end{bmatrix}$$

(a) För vilka värden på t är $A(t)$ inverterbar? **(3 p)**

(b) Ge något värde på t så att det motsvarande systemet

$$A(t)\vec{x} = \vec{0}$$

har oändligt många lösningar och bestäm lösningsmängden. **(3 p)**

Var god vänd!

DEL B

3. Delrummet V i $\mathbb{R}^4$ ges som det linjära höljet av vektorerna

$$\vec{u} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en icke-trivial linjär relation mellan vektorerna $\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{w}$. **(3 p)**

(b) Beräkna avståndet från punkten $\vec{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ till V. **(3 p)**

4. Betrakta följande avbildning:

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (0, x)$$

(a) Bestäm alla egenvärden och tillhörande egenrum till F. **(3 p)**

(b) Bestäm om matrisen till F är diagonaliserbar. **(3 p)**

DEL C

5. Delrummet V i $\mathbb{R}^3$ ges av ekvationen $x - 2y + z = 0$. Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y + 3z \\ 2x - 4y + 6z \\ 3x - 6y + 9z \end{bmatrix}.$$

(a) Hitta en bas $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ till $\mathbb{R}^3$ sådan att V är det linjära höljet av $\vec{u}$ och $\vec{v}$. **(2 p)**

(b) Visa att $T(\vec{x})$ ligger i V för alla $\vec{x}$ som ligger i V. **(2 p)**

(c) Bestäm en matrisrepresentation för avbildningen T med avseende på basen $\mathcal{B}$ av $\mathbb{R}^3$. **(2 p)**

6. Multiplikationstabellen M definieras som den 9×9-matris vars element ges av formeln $M_{ij} = i \cdot j$, där $i, j = 1, 2, \ldots, 9$.

(a) Bestäm rangen av matrisen M. **(2 p)**

(b) Visa att talet $1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2 = 285$ är ett egenvärde till matrisen M. Vad är motsvarande egenvektorer? Bestäm därefter alla övriga egenvärdena till M (egenvektorer behöver inte anges). **(4 p)**