KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen med lösningsförslag
måndag, 13 mars 2017

1. Betrakta vektorerna $\vec{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{Q} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Låt l_1 vara linjen som går genom $\vec{P}$ och $\vec{Q}$ och låt l_2 vara linjen som är parallell med $\vec{u}$ och som går genom $\vec{P}$.

(a) Bestäm parameterframställningar till linjerna l_1 och l_2. **(3 p)**
(b) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller linjerna l_1 och l_2. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) För att bestämma en parameterframställning för l_1 behöver vi en riktningsvektor och då kan vi välja vektorn från P till Q, dvs

$$\vec{v} = \overline{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-1 \\ 3-1 \\ 0-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Därmed kan vi skriva parameterframställnignen för l_1 som $\vec{P} + t\vec{v}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

För linjen l_2 kan vi välja $\vec{u}$ som riktningsvektor eftersom den ska vara parallell med $\vec{u}$. Därmed blir parameterframställningen $\vec{P} + t\vec{u}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Planet som innehåller båda linjerna måste ha en normalvektor som är vinkelrät mot både $\vec{u}$ och $\vec{v}$. Därför kan vi använda kryssprodukten för att beräkna normalvektorn som blir

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 2 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 - (-1)\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = -4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Därmed kan planets ekvation skrivas som $x + y = d$ för någon konstant P. För att bestämma d kan vi sätta in P och får då $d = 1 + 1 = 2$ och planets ekvation är $x + y = 2$. Vi kan lätt kotrollera räkningarna genom att se att Q också ligger i planet och att $\vec{u}$ är parallell med planet.

2. Betrakta följande matris:

$$A(t) = \begin{bmatrix} t & 1 & 10-t \\ 1 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & t \end{bmatrix}$$

(a) För vilka värden på t är $A(t)$ inverterbar? **(3 p)**

(b) Ge något värde på t så att det motsvarande systemet

$$A(t)\vec{x} = \vec{0}$$

har oändligt många lösningar och bestäm lösningsmängden. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Matrisen är inverterbar om och endast om $\det A(t) \neq 0$.

$$\det A(t) = \begin{vmatrix} t & 1 & 10-t \\ 1 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 10+t \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 10+t \end{vmatrix} = -t,$$

så $A(t)$ är inverterbar om och endast om $t \neq 0$. (Andra likheten fås efter addition av första kolonn till tredje kolonn, och den tredje likheten fås efter utveckling längs andra raden.)

(b) Ett kvadratiskt homogent system $M\vec{x} = 0$ har oändligt många lösningar om och endast om $\det M = 0$, så det givna systemet har enligt a) oändligt många lösningar om och endast om $t = 0$. I detta fall har systemet koefficientmatrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Att den första och den andra matrisen ovan är radekvivalenta ses genom att subtrahera 10 gånger andra raden från den tredje raden i den första matrisen.)

Följaktligen ges lösningarna av

$$\vec{x} = s\begin{bmatrix} 1 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

3. Delrummet V i $\mathbb{R}^4$ ges som det linjära höljet av vektorerna

$$\vec{u} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en icke-trivial linjär relation mellan vektorerna $\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{w}$. **(3 p)**

(b) Beräkna avståndet från punkten $\vec{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ till V. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) För att hitta en icke-trivial linjär relation mellan vektorerna söker vi x, y och z så att $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$. Vi kan förenkla räkningarna genom att inte ta med skalfaktorerna och söker en lösning till det homogena linjära ekvationssystemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

och med Gausselimination får vi

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 + r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - 2r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 - \frac{1}{3}r_2 \\ \frac{1}{3}r_2 \\ r_4 + \frac{1}{3}r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi ser nu att z är en fri variabel och för att hitta en lösning kan vi sätta $z = 1$ och löser ut $y = -1$ och $x = -1$ med hjälp av de två nollskilda raderna. För att få relationen behöver vi ta med skalfaktorerna igen och har då relationen $(-1) \cdot 3\vec{u} + (-1) \cdot 5\vec{v} + 1 \cdot 7\vec{w} = \vec{0}$ vilket också kan skrivas $\vec{w} = \frac{3}{7}\vec{u} + \frac{5}{7}\vec{v}$.

(b) Vi kan hitta den närmsta punkten genom att använda minsta-kvadratmetoden. Eftesom $\vec{w}$ inte tillför någon information räcker det att försöka skriva den givna vektorn som $x \cdot 3\vec{u} + y \cdot 5\vec{v}$ och det ger det överbestämda systemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

och minsta-kvadratmetoden säger att vi ska lösa $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$ istället för $A\vec{x} = \vec{b}$. Detta ger ekvationssystemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{rr|r} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \end{array}\right]$$

som vi kan lösa med Gausselimination eller med Cramers regel som ger

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}} = \frac{11}{45} \quad \text{och} \quad y = \frac{\det\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}} = \frac{29}{45}.$$

Därmed ges projektionen av den givna vektorn på delrummet av

$$\frac{11}{45}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{29}{45}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{45}\begin{bmatrix} 40 \\ 47 \\ 40 \\ 51 \end{bmatrix}$$

och avståndet till delrummet ges av längden av skillnadsvektorn

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{45}\begin{bmatrix} 40 \\ 47 \\ 40 \\ 51 \end{bmatrix} = \frac{1}{45}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

som blir $\sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + 5^2 + (-6)^2}/45 = \sqrt{90}/45 = \sqrt{10}/15$.

4. Betrakta följande avbildning:

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (0, x)$$

(a) Bestäm alla egenvärden och tillhörande egenrum till F. **(3 p)**

(b) Bestäm om matrisen till F är diagonaliserbar. **(3 p)**

Lösningsförslag. Vi bestämmer avbildningens standardmatris

$$[F] = \begin{pmatrix} | & | \\ F(\boldsymbol{e}_1) & F(\boldsymbol{e}_2) \\ | & | \end{pmatrix}$$

där $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$ och $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$. Eftersom vi har att $F(\boldsymbol{e}_1) = (0, 1)$ och $F(\boldsymbol{e}_2) = (0, 0)$ så är

$$[F] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Den karakteristiska ekvationen

$$\det\big([F]-\lambda I\big) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0$$

har lösningen $\lambda = 0$, dvs. dubbelt egenvärde.

För att bestämma egenrummet till $\lambda = 0$ löser vi egenvektorekvationen $\big([F]-\lambda I\big)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, dvs.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \scriptstyle R_2 \\ \scriptstyle R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Med $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ fås $x_2 = t$ och $x_2 = 0$, dvs. $\boldsymbol{x} = t(0,1)$ där $t \in \mathbf{R}$. Egenrummet ges därmed av $\operatorname{span}\{(0,1)\}$.

b) Matrisen $[F]$ är inte diagonaliserbar eftersom det skulle kräva två linjärt oberoende egenvektorer och vi har ett 1-dimensionellt egenrum.

5. Delrummet V i $\mathbb{R}^3$ ges av ekvationen $x - 2y + z = 0$. Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-2y+3z \\ 2x-4y+6z \\ 3x-6y+9z \end{bmatrix}.$$

(a) Hitta en bas $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ till $\mathbb{R}^3$ sådan att V är det linjära höljet av $\vec{u}$ och $\vec{v}$. **(2 p)**

(b) Visa att $T(\vec{x})$ ligger i V för alla $\vec{x}$ som ligger i V. **(2 p)**

(c) Bestäm en matrisrepresentation för avbildningen T med avseende på basen $\mathcal{B}$ av $\mathbb{R}^3$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi konstruera först en bas $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ till V och komplettera den sedan till en bas $\mathcal{B}$ till $\mathbb{R}^3$. Eftersom V är ett tvådimensionellt rum i $\mathbb{R}^3$ räcker det att välja två linjärt oberoende vektorer i V för att hitta en bas. Vi kan välja

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det är också dessa vi kommer fram till om vi använder standardmetoden för att bestämma en bas till nollrummet till matrisen $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. För $\vec{w}$ kan vi ta vilken vektor som helst som inte ligger i V, t. ex. $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

(b) Bildrummet är alltid ett delrum, så det räcker att se att båda $T(\vec{u})$ och $T(\vec{v})$ ligger i V. Vi beräknar alltså:

$$T(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 - 2\cdot 0 + 3\cdot(-1) \\ 2\cdot 1 - 4\cdot 0 + 6\cdot(-1) \\ 3\cdot 1 - 6\cdot 0 + 9\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix} = 6\vec{u} - 4\vec{v}$$

och

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 - 2\cdot 1 + 3\cdot 0 \\ 2\cdot 2 - 4\cdot 1 + 6\cdot 0 \\ 3\cdot 2 - 6\cdot 1 + 9\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att båda bilderna ligger i V.

(c) För att beräkna matrisen behöver vi beräkna värdet av T på basvektorerna och trycka ut dem som linjärkombinationer av basvektorerna igen. För $\vec{u}$ och $\vec{v}$ har vi precis gjort det i deluppgift (b):

$$T(\vec{u}) = 6\vec{u} - 4\vec{v} + 0\vec{w} \quad \text{och} \quad T(\vec{v}) = 0\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w}.$$

För vektorn $\vec{w}$ får vi:

$$T(\vec{w}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = -3\vec{u} + 2\vec{v} - 4\vec{w}.$$

Matrisen blir alltså:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

OBS: Använder man en annan bas i (a) så får man en annan matris i (c).

6. Multiplikationstabellen M definieras som den 9×9-matris vars element ges av formeln $M_{ij} = i \cdot j$, där $i, j = 1, 2, \ldots, 9$.

(a) Bestäm rangen av matrisen M. **(2 p)**

(b) Visa att talet $1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2 = 285$ är ett egenvärde till matrisen M. Vad är motsvarande egenvektorer? Bestäm därefter alla övriga egenvärdena till M (egenvektorer behöver inte anges). **(4 p)**

Lösningsförslag.

(a) Låt R_k beteckna rad k i matrisen M. Då är

$$\begin{aligned} R_k &= \begin{bmatrix} k & 2k & 3k & 4k & 5k & 6k & 7k & 8k & 9k \end{bmatrix} \\ &= k \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = kR_1. \end{aligned}$$

Det följer att M är radekvivalent med 9×9 matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

så $\operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}(A) = 1$.

(b) Låt E_0 beteckna nollrummet till M. Enligt rangsatsen är då

$$\dim(E_0) = 9 - \operatorname{rang}(M) = 9 - 1 = 8.$$

Eftersom $M\vec{x} = 0\vec{x}$ om och endast om $\vec{x} \in E_0$, och E_0 är icke-trivialt, är $\lambda_0 = 0$ ett egenvärde med egenrum E_0.

Betrakta nu produkten $M\vec{v}$, där $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^T$. Elementet på rad k i $M\vec{v}$ ges av

$$R_k\vec{v} = k \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = k\left(1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2\right) = 285k,$$

det vill säga $M\vec{v} = 285\vec{v}$, så $\vec{v}$ är en egenvektor till M med egenvärde $\lambda_1 = 285$. Egenrummet E_1 till egenvärdet λ_1 innehåller alla vektorer $t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$. Alltså är $\dim(E_1) \geq 1$.

Det återstår att visa att det inte finns några andra egenvärden än 0 och 285. Egenvektorer hörande till olika egenvärden är linjärt oberoenden. Så om $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_8\}$ är en bas för E_0 är $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_8, \vec{v}\}$, $\vec{v} \in E_1$ som ovan, 9 linjärt obereonde vektorer i $\mathbb{R}^9$, och således en bas för $\mathbb{R}^9$. Det följer att det inte finns några ytterligare egenvärden. Det följer också att $\dim(E_1) = 1$, så egenvektorerna till egenvärdet $\lambda_1 = 285$ är precis alla vektorer på formen $t\vec{v}$, där $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^T$.