Institutionen för matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Onsdagen den 15 mars 2017

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

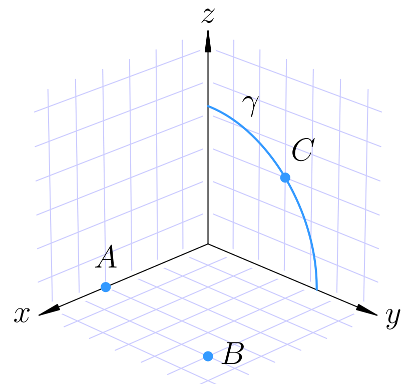
DEL A

1. I nedanstående rätvinkliga koordinatsystem är varje ruta en enhet lång.

(a) Bestäm de rymdpolära (sfäriska) koordinaterna för punkterna A, B och C. **(2 p)**

(b) Bestäm en parametrisering i x,y,z-koordinater av kvartscirkelbågen γ i yz-planet med medelpunkt i origo. **(1 p)**

(c) Bestäm en tangentvektor till kurvan γ i punkten C. **(1 p)**



2. En liten kula placeras på ovansidan av funktionsytan $z = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^2$ i punkten $(3, 2, 4)$ och börjar sedan rulla på grund av tyngdkraften som verkar nedåt i negativa z-axelns riktning.

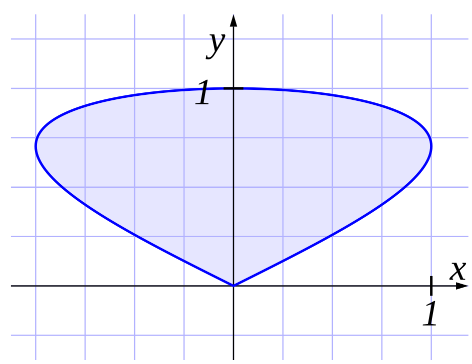
(a) Åt vilket håll börjar den rulla om vi bortser från z-riktningen? **(3 p)**

(b) Hur brant är det där kulan släpps? **(1 p)**

3. Arean av området som innesluts av en sluten, enkel kurva $\mathcal{C}$ kan enligt Greens formel beräknas med hjälp av en kurvintegral, $\int_{\mathcal{C}} x\,dy$ eller $\int_{\mathcal{C}} y\,dx$.

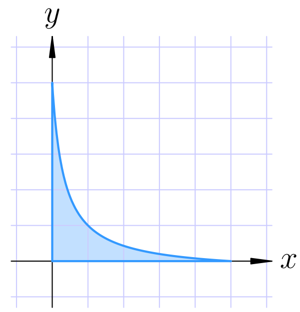
(a) Vilken orientering ska kurvan ha för att den första av integralerna ska ge arean med positivt tecken? (Glöm inte att motivera svaret.) **(1 p)**

(b) Använd någon av de två integralerna för att beräkna arean innanför kurvan som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (\sin 2t, \sin t)$, där $0 \le t \le \pi$. **(3 p)**



DEL B

4. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x,y) = x - xy + y$ i området D som definieras av $x \geq 0$, $y \geq 0$, $(x+1)(y+1) \leq 16$.



Området D

(4 p)

5. Använd variabelbytet $u = x + y$, $v = y - 2x$ för att beräkna integralen

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (y-2x)^2 \sqrt{x+y}\, dy\, dx$$

(4 p)

6. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet i rummet som ges av

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(e^{-y^2-z^2}, e^{-x^2-z^2}, e^{-x^2-y^2}\right).$$

Låt $\mathcal{S}$ vara den sneda kon utan botten som består av alla räta linjesegment vars ena ändpunkt är $(1,0,3)$ och vars andra ändpunkt ligger på cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ i xy-planet $z = 0$. Använd divergenssatsen för att beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom ytan $\mathcal{S}$ **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Låt $\mathcal{S}$ vara den orienterade yta i rummet $\mathbb{R}^3$ som ges av $\mathbf{r}(s,t) = (s,t,st)$ där $s^2 + t^2 \leq 1$ och vars normalvektor har positiv z-komponent. Låt $\mathcal{C}$ vara den orienterade randkurvan till $\mathcal{S}$ och låt vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y,\ xy,\ z^2).$$
Stokes sats relaterar flödet av rotationen av ett vektorfält genom en yta med kurvintegralen av fältet längs randkurvan. Formulera Stokes sats och använd den för att beräkna kurvintegralen
$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} y\,dx + xy\,dy + z^2\,dz.$$
(4 p)

8. Låt $\mathcal{S}$ vara lösningsmängden till ekvationen
$$x^2 + y^2 = z\cos z.$$
   (a) Förklara hur vi kan vara säkra på att det finns en funktion $f(x,y)$ sådan att $\mathcal{S}$ i en omgivning till punkten $(x,y,z) = (0,0,0)$ sammanfaller med grafen $z = f(x,y)$. **(2 p)**
   (b) Visa att $(x,y) = (0,0)$ är en kritisk punkt till funktionen f. **(1 p)**
   (c) Undersök om denna kritiska punkt är ett lokalt minimum, ett lokalt maximum eller ingetdera. **(1 p)**

9. För en given kurva $\mathcal{C}$ i planet $\mathbb{R}^2$ kan vi definiera det genomsnittliga avståndet mellan två punkter på $\mathcal{C}$ som
$$\bar{d}(\mathcal{C}) = \frac{1}{L^2}\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{C}} |\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(t)|\,dsdt,$$
där L är längden av $\mathcal{C}$ och $\mathbf{r}(t)$ är en båglängdsparametrisering av $\mathcal{C}$.
   (a) Beräkna $\bar{d}(\mathcal{C})$ där $\mathcal{C}$ är linjestycket från $(0,0)$ till $(1,1)$. **(2 p)**
   (b) Beräkna $\bar{d}(\mathcal{C})$ där $\mathcal{C} = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, enhetscirkeln i planet. **(2 p)**