

TENTAMEN, DEL 1

SF1524

GRUNDLÄGGANDE NUMERISKA METODER OCH PROGRAMMERING

Torsdag 16 mars 2017 kl 8.00-11.00

Namn:

Personnummer:..... Program och årskurs:

Max antal poäng är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 12 poäng. Endast ett korrekt svar per uppgift. Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Skriv svaren på dessa papper. Skriv namn och personnummer på varje sida.

- (2p) 1. Ekvationen $x^3 + 2 = 4x$ har en rot mellan 0 och 1. En iteration med Newtons metod och startgissning $x_0 = 0$ ger x_1 lika med:

- | | | | |
|-------------------------------|------------------------------|------------------------------|----------------------------|
| ☐ -1/4 | ☐ 1/8 | ☐ 1/3 | ☐ 1 |
| ☐ 0 | ☐ 1/4 | ☐ 1/2 | ☐ 2 |

2. Mätpunkterna:

x	1	2	3	4
y	1	3	9	15

ska anpassas till ekvationen $y = c_1 \tan(x) + c_2 x^2$ med minsta kvadratmetoden. Det leder till det överbestämda ekvationssystemet $A\mathbf{c} \approx \mathbf{y}$ där kolumnvektorn $\mathbf{c}$ ska bestämmas.

- (1p) a. Vilken dimension får matrisen A (rader $\times$ kolumner)?

- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| ☐ 2×2 | ☐ 2×4 | ☐ 4×2 |
| ☐ 2×3 | ☐ 4×1 | ☐ 4×4 |

- (1p) b. Vilken dimension får matrisen i normalekvationerna (rader $\times$ kolumner)?

- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| ☐ 1×4 | ☐ 2×3 | ☐ 4×1 |
| ☐ 2×2 | ☐ 3×3 | ☐ 4×4 |

- (2p) 3. Programmet nedan är tänkt att lösa den icke linjära ekvationen $x + 5e^{2x} = 10$ med Newtons metod.

```
f=@(x)x+5*exp(2*x)-10; %radnummer 1
fprim=@(x)-1+10*exp(2*x); %2
x=0; %3
dx=1; iter=0; %4
while abs(dx)>0.5e-5 && iter<5 %5
    iter=iter+1; %6
    dxold=dx; %7
    dx=f(x)/fprim(x); %8
    x=x-dx;
    disp([x abs(dx) abs(dx)/abs(dxold)^2]);
end
```

När programmet användes genererades följande utskrift:

0.5556	0.5556	0.5556
0.3600	0.1955	0.6335
0.3277	0.0324	0.8466
0.3300	0.0024	2.2828
0.3298	0.0003	46.6198

Utskriftet visar att programmet innehåller ett fel som gör att Newtons metod konvergerar långsamt. Felet finns på rad

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

- (2p) 4. För en vektor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ räknas den Euklidiska normen som $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$. Raderna i ett program i MATLAB som är tänkt att vara en funktion som ska räkna ut den Euklidiska normen av en vektor har blivit omstuvade:

1. s=sqrt(s);
2. for i=1:length(v)
3. function s=Euknorm(v)
4. s=s+v(i)^2;
5. s=0;
6. end

Svara med en följd av radnummer som ger ett korrekt fungerande program.

--	--	--	--	--	--

- (2p) 5. Differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + y, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

löses med framåt Euler (explicit Euler) och steglängd $h = 0.5$.

a) Vad blir approximationen till $y(0.5)$?

☐ 0 ☐ 1/2 ☐ 3/4 ☐ 1 ☐ 5/4

b) Vad blir approximationen till $y(1)$?

☐ 1/4 ☐ 1/2 ☐ 1 ☐ 9/8 ☐ 5/4

- (2p) 6. För en funktion har man mätt upp följande värden

t	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(t)$	2	3	4	3	2

Om trapetsregeln används för att approximera $\int_{0.2}^{0.6} f(t)dt$ så får man värdet (samtliga funktionsvärden ska användas)

☐ 1.0 ☐ 1.36 ☐ 1.6
☐ 1.2 ☐ 1.44 ☐ 12

- (2p) 7. Antag att du approximerat integralen

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx,$$

med trapetsregeln med steglängd h och uppskattat felet till $e_h \approx 10^{-2}$. Om du vill minska felet med en faktor 100 till $e_h \approx 10^{-4}$, hur bör du välja din steglängd?

☐ $h/3$ ☐ $h/10$ ☐ $h/50$
☐ $h/5$ ☐ $h/20$ ☐ $h/100$

- (2p) 8. Givet ekvationen
- $-0.8x^3 + 0.8x + 0.05 = 0$
- där rötterna
- α_1
- ,
- α_2
- och
- α_3
- är ungefär -1, 0, 1. Ekvationen skrivs om och följande fixpunktsmetod används:

$$x_{n+1} = -0.8x_n^3 + 1.8x_n + 0.05,$$

där startgissningen x_0 är given. Vilken eller vilka av rötterna kan beräknas med denna fixpunktsmetod?

☐ Ingen ☐ α_2 ☐ α_1 och α_2 ☐ α_2 och α_3
☐ α_1 ☐ α_3 ☐ α_1 och α_3 ☐ α_1, α_2 och α_3

(2p) 9. Givet tabellen nedan

x	2	3	5	7	9
$y(x)$	3	-5	5	-7	2

a. Skatta $y(4)$ med styckvis linjär interpolation. Vad blir skattningen av $y(4)$?

☐ -7.0

☐ -3.0

☐ 0.0

☐ 4.5

☐ -5.5

☐ -1.5

☐ 2.5

☐ 6.0

b. Om man vill lägga ett interpolationspolynom till alla tabellvärdena, vilket är det lägsta gradtal man måste ansätta då?

☐ 0

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 6

(2p) 10. Du vill hitta roten α till ekvationen

$$f(\alpha) = \int_0^\alpha e^{-t^2} dt + \alpha^2 - 1 = 0$$

Vilka numeriska metoder är lämpliga att kombinera för att lösa problemet?

☐ Trapetsregeln och interpolation

☐ Framåt Euler och extrapolation

☐ Trapetsregeln och Newtons metod

☐ Minsta kvadratmetoden och framåt Euler

☐ 4:e ordningens Runge-Kutta och trapetsregeln

TENTAMEN, DEL 2

SF1524

GRUNDLÄGGANDE NUMERISKA METODER OCH PROGRAMMERING

Torsdag 16 mars 2017 kl 8.00-11.00

Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgräns: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximal poäng 50. Miniräknare är ej tillåten på denna tentamen. Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

P1. Givet differentialekvationen

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \cos(x)\frac{dy}{dx} - \alpha\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad y(0) = 10, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2}(0) = 1$$

- (4p) **a.** Skriv om problemet till ett system av differentialekvationer av första ordningen. Glöm inte begynnelsedata.
- (6p) **b.** Skriv ett MATLAB-program som löser det omskrivna problemet för $\alpha = 0.1$ för x på intervallet 0 till 5 och ritar upp funktionen $w(x) = y(x) + 5y'(x)$.
- (2p) **c.** MATLAB-rutinen ode45 använder sig av explicita metoder och adaptivitet. Förklara vad dessa begrepp innebär.
- (7p) **d.** När ett program som löser differentialekvationen kördes för $\alpha = 0.05$ fick man $y(5)$ till 17.46407. När α ändrades till 0.5 blev $y(5) = 24.77647$. Du vill hitta ett α som ger $y(5) = 20$. Man kan göra detta på flera olika sätt. Beskriv en algoritm, tex i form av ett MATLAB-program, som med fem decimalers noggrannhet hittar α . Diskutera hur effektiv din algoritm är. Alltför ineffektiva metoder ger inte full poäng.

P2. Man vill bygga en rutschkana. För att den skall vara bekväm att åka i skall den börja och sluta med horisontell lutning. Själva banan sitter fast i sex punkter angivna i tabellen nedan

	A	B	C	D	E	F
x	0.0	2.0	4.0	5.0	6.0	8.0
y	6.0	6.0	4.0	2.0	1.0	0.0

där y är höjden ovanför marken ($y=0$). Mellan de två första punkterna (A och B) skall rutschkanan vara helt horisontell. Genom de tre sista punkterna (D, E och F) skall rutschkanan gå som ett tredjegradspolynom där lutningen i slutpunkten är noll. Genom mittenpunkterna (B, C och D) skall rutschkanan gå som ett interpolationspolynom av så låg grad som möjligt.

- (4p) **a.** Beräkna (för hand) rutschkanans höjd vid $x = 3.0$ ($y(3)$).

- (6p) **b.** Härled och ställ upp det ekvationssystem som behöver lösas för att beräkna koefficienterna i polynomet på den sista delen av banan (dvs punkterna D, E och F).
- (6p) **c.** Skriv ett MATLAB-program som beräknar rutschkanans form enligt ovanstående beskrivning och plottar kanan så att den ser slät och fin ut.
- (4p) **d.** Skriv ett MATLAB-program som anpassar ett tredjegradspolynom med minstakvadratmetoden till samtliga punkter i tabellen. Beräkna hur mycket minstakvadratkurvan skiljer sig i höjdled i de givna punkterna A-F. Programmet skall också beräkna lutningen hos minstakvadratkurvan i start och slutpunkterna.
- (4p) **e.** För att uppskatta byggkostnaderna behöver man bland annat veta hur stor arean på sidan av rutschkanan är. Gör en grov skattning av arean genom att bortse från punkterna B, D och E och skatta integralen över $y(x)$ för $0 \leq x \leq 8$ med trapetsregeln. Gör också en felskattning.

P3. Antag att funktionen $y(x)$ är en snäll funktion som sätts in i formeln nedan

$$\frac{y(x) + 2y(x+h) - 3y(x+2h)}{\alpha}$$

- (4p) **a.** Formeln skall skatta värdet av $y'(x)$. Vad måste α sättas till då?
- (3p) **b.** Vilken noggrannhetsordning får formeln då?