



SF1669 Matematisk och numerisk analys II
Tentamen
Onsdagen den 15 mars 2017

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

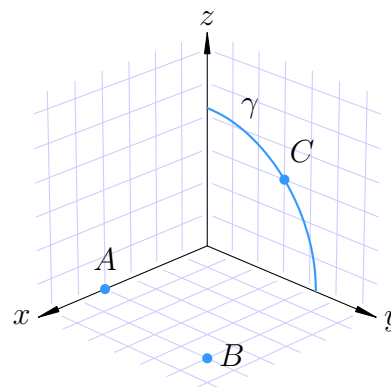
För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

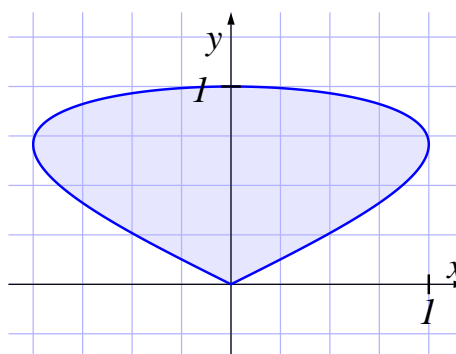
1. I nedanstående rätvinkliga koordinatsystem är varje ruta en enhet lång.

- (a) Bestäm de rymdpolära (sfäriska) koordinaterna för punkterna A , B och C . **(2 p)**
- (b) Bestäm en parametrisering i x, y, z -koordinater av kvartscirkelbågen γ i yz -planet med medelpunkt i origo. **(1 p)**
- (c) Bestäm en tangentvektor till kurvan γ i punkten C . **(1 p)**



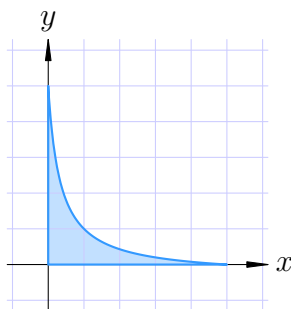
2. En liten kula placeras på ovensidan av funktionsytan $z = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^2$ i punkten $(3, 2, 4)$ och börjar sedan rulla på grund av tyngdkraften som verkar nedåt i negativa z -axelns riktning.
- (a) Åt vilket håll börjar den rulla om vi bortser från z -riktningen? **(3 p)**
- (b) Hur brant är det där kulan släpps? **(1 p)**
3. Arealen av området som innesluts av en sluten, enkel kurva C kan enligt Greens formel beräknas med hjälp av en kurvintegral, $\int_C x \, dy$ eller $\int_C y \, dx$.

- (a) Vilken orientering ska kurvan ha för att den första av integralerna ska ge arean med positivt tecken? (Glöm inte att motivera svaret.) **(1 p)**
- (b) Använd någon av de två integralerna för att beräkna arean innanför kurvan som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (\sin 2t, \sin t)$, där $0 \leq t \leq \pi$. **(3 p)**



DEL B

4. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x, y) = x - xy + y$ i området D som definieras av $x \geq 0$, $y \geq 0$, $(x + 1)(y + 1) \leq 16$.

Området D

(4 p)

5. Använd variabelbytet $u = x + y$, $v = y - 2x$ för att beräkna integralen

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 2x)^2 \sqrt{x + y} \, dy \, dx$$

(4 p)

6. Vi löser en skalär ODE numeriskt med olika steglängder h där felet antas bero snällt på steglängden. Metoden ger oss approximationerna y_h av den exakta lösningen $y(1)$. Nedan listas felet i några av dessa värden.

h	$y_h - y(1)$
0,2	0,004829079851400
0,1	0,001060288025847
0,05	0,000248077100078
0,025	0,000059971929861
0,0125	0,000014722618695

TABELL 1. Fel beroende på steglängd

- (a) Vilken noggrannhetsordning har metoden?

(2 p)

- (b) Uppskatta hur stort felet $y_{0,01} - y(1)$ skulle vara.

(2 p)

Var god vänd!

DEL C

7. Låt \mathcal{S} vara den orienterade yta i rummet \mathbb{R}^3 som ges av $\mathbf{r}(s, t) = (s, t, st)$ där $s^2 + t^2 \leq 1$ och vars normalvektor har positiv z -komponent. Låt \mathcal{C} vara den orienterade randkurvan till \mathcal{S} och låt vektorfältet \mathbf{F} ges av

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y, xy, z^2).$$

Stokes sats relaterar flödet av rotationen av ett vektorfält genom en yta med kurvintegralen av fältet längs randkurvan. Formulera Stokes sats och använd den för att beräkna kurvintegralen

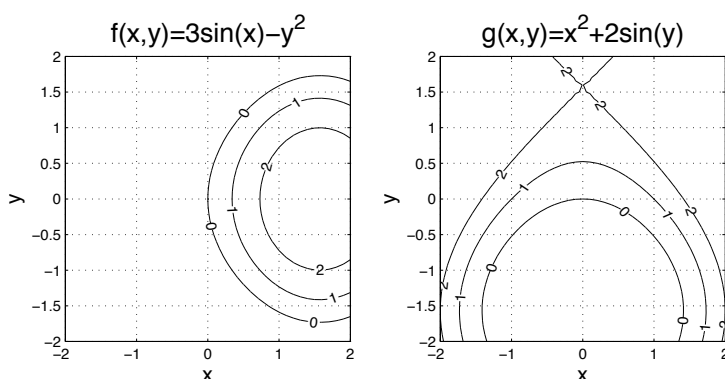
$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} y dx + xy dy + z^2 dz.$$

(4 p)

8. Newtons metod för system ska användas för att lösa ekvationssystemet $\mathbf{F}(x, y) = (2, 1)$ i området $y > 0$ där $\mathbf{F}(x, y) = (3 \sin(x) - y^2, x^2 + 2 \sin(y))$.

(a) Använd nedanstående nivåkurvor för att bestämma en bra startgissning.

(1 p)



- (b) Skriv ett Matlabprogram som bestämmer lösningen till systemet med hjälp av Newtons metod för system. Felet i såväl x - som y -led ska vara högst 10^{-10} .

(3 p)

9. För en given kurva \mathcal{C} i planet \mathbb{R}^2 kan vi definiera det genomsnittliga avståndet mellan två punkter på \mathcal{C} som

$$\bar{d}(\mathcal{C}) = \frac{1}{L^2} \int_{\mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} |\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(t)| ds dt,$$

där L är längden av \mathcal{C} och $\mathbf{r}(t)$ är en båglängdsparametrisering av \mathcal{C} .

- (a) Beräkna $\bar{d}(\mathcal{C})$ där \mathcal{C} är linjestycket från $(0, 0)$ till $(1, 1)$.

(2 p)

- (b) Beräkna $\bar{d}(\mathcal{C})$ där $\mathcal{C} = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, enhetscirkeln i planet.

(2 p)