SF1669 Matematisk och numerisk analys II
Lösningsförslag till tentamen 2017-03-15

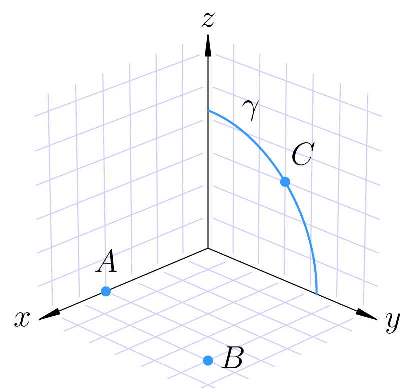
Del A

1. I nedanstående rätvinkliga koordinatsystem är varje ruta en enhet lång.

(a) Bestäm de rymdpolära (sfäriska) koordinaterna för punkterna A, B och C. **(2 p)**

(b) Bestäm en parametrisering i x,y,z-koordinater av kvartscirkelbågen γ i yz-planet med medelpunkt i origo. **(1 p)**

(c) Bestäm en tangentvektor till kurvan γ i punkten C. **(1 p)**



Lösningsförslag. Rymdpolära koordinater är (R, ϕ, θ), där R är vektorns längd, ϕ är vinkeln mot z-axeln, och θ vinkeln i xy-planet för projektionen (longitud).

(a) A: $(R, \phi, \theta) = (4, \pi/2, 0)$.
B: $(R, \phi, \theta) = (\sqrt{50}, \pi/2, \pi/4)$
C: $(R, \phi, \theta) = (\sqrt{18}, \pi/4, \pi/2)$

(b) Cirkeln har radie $\sqrt{18}$ och vi använder polära koordinater i yz-planet för att beskriva den. Eftersom $x = 0$ på cirkeln blir parametriseringen $(x, y, z) = (0, \sqrt{18}\cos t, \sqrt{18}\sin t)$, där $0 \leq t \leq \pi/2$.

(c) Derivering av parametriseringen ger att $\big(\dot{x}(\pi/4), \dot{y}(\pi/4), \dot{z}(\pi/4)\big) = \big(0, -\sqrt{18}/\sqrt{2}, \sqrt{18}/\sqrt{2}\big) = (0, -3, 3)$.

Svar.

(a) A: $(R, \phi, \theta) = (4, \pi/2, 0)$. B: $(R, \phi, \theta) = (\sqrt{50}, \pi/2, \pi/4)$ och C: $(R, \phi, \theta) = (\sqrt{18}, \pi/4, \pi/2)$.

(b) $(x, y, z) = (0, \sqrt{18}\cos t, \sqrt{18}\sin t)$, där $0 \leq t \leq \pi/2$.

(c) $(0, -3, 3)$ är en tangentvektor till γ i C.

2. En liten kula placeras på ovansidan av funktionsytan $z = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{4}y^2$ i punkten $(3, 2, 4)$ och börjar sedan rulla på grund av tyngdkraften som verkar nedåt i negativa z-axelns riktning.
   (a) Åt vilket håll börjar den rulla om vi bortser från z-riktningen? **(3 p)**
   (b) Hur brant är det där kulan släpps? **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Låt $f(x, y) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^2$ och beräkna gradienten: $\nabla f = (\frac{2}{3}x, \frac{1}{2}y)$. I punkten $(x, y) = (3, 2)$ blir gradienten $\nabla f(3, 2) = (2, 1)$. Gradienten pekar pekar motsatt mot starkaste avtagandet så i xy-planet kommer kulan att rulla i samma riktning som $-\nabla f(3, 2) = (-2, -1)$. En normaliserad riktningsvektor i xy-planet blir $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2, -1)$.

(b) Riktningsderivatan i gradientents rikning talar om hur stor lutningen maximalt är. I det här fallet är gradientens belopp $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Svar.

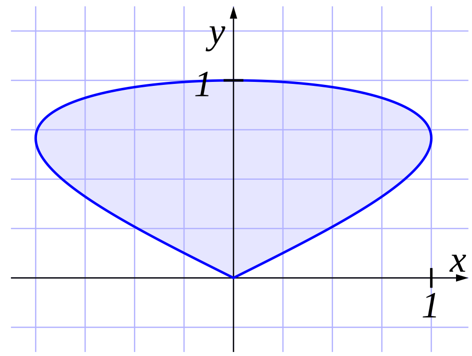
(a) Riktningen blir i xy-planet $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2, -1)$.

(b) Lutningen är $\sqrt{5}$.

3. Arean av området som innesluts av en sluten, enkel kurva $\mathcal{C}$ kan enligt Greens formel beräknas med hjälp av en kurvintegral, $\int_{\mathcal{C}} x\,dy$ eller $\int_{\mathcal{C}} y\,dx$.

(a) Vilken orientering ska kurvan ha för att den första av integralerna ska ge arean med positivt tecken? (Glöm inte att motivera svaret.) **(1 p)**

(b) Använd någon av de två integralerna för att beräkna arean innanför kurvan som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (\sin 2t, \sin t)$, där $0 \le t \le \pi$. **(3 p)**



Lösningsförslag.

(a) Enligt Greens formel

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy$$

blir $\int_C x\,dy$ lika med arean, förutsatt att C är i positiv led. Detta beror på att med $P = 0$ och $Q = x$ blir $Q'_x - P'_y = 1 - 0 = 1$ och integralen av 1 över området D innanför C ger områdets area.

(b) Kurvan är orienterad i positiv led, så vi använder den första integralen för att uttrycka arean. Då blir

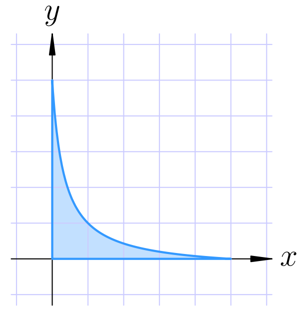
$$\int_C x\,dy = \int_0^\pi \sin(2t)\cos t dt = 2\int_0^\pi \sin t \cos^2 t dt = 2\left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi = \frac{4}{3}$$

vilket alltså uttrycker arean innanför kurvan.

Svar. Arean är $4/3$.

DEL B

4. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x,y) = x - xy + y$ i området D som definieras av $x \geq 0$, $y \geq 0$, $(x+1)(y+1) \leq 16$.



Området D

(4 p)

Lösningsförslag. Funktionen f är kontinuerligt deriverbar och området D är kompakt. Därför antas största och minsta värde i någon av följande punkter

(a) inre kritiska punkter,
(b) max- och minpunkter längs randen,
(c) hörnpunkterna.

Vi får att

(a) Gradienten är $\nabla f(x,y) = (1-y, 1-x)$ som är lika med nollvektorn precis då $(x,y) = (1,1)$. Alltså är $(1,1)$ den enda kritiska punkten och där har vi $f(1,1) = 1$.

(b) Vi har tre delar av randen. Vi börjar med att undersöka randkurvan $(x+1)(y+1) = 16$ med hjälp av Lagranges metod. Då kan vi bilda hjälpfunktionen

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x - xy + y + \lambda((x+1)(y+1) - 16)$$

där g uttrycker bivillkoret. Stationära punktvillkoret på randkurvan ges av att gradienten av F är noll med avseende på alla tre variablerna:

$$\nabla F(x,y,\lambda) = (1 - y + \lambda(y+1), 1 - x + \lambda(x+1), (x+1)(y+1) - 16)$$

och vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1 - y + \lambda(y+1) &= 0, \\ 1 - x + \lambda(x+1) &= 0, \\ (x+1)(y+1) - 16 &= 0. \end{cases}$$

Eftersom $x + 1 \neq 0$ och $y + 1 \neq 0$ får vi

$$\lambda = \frac{y-1}{y+1} = \frac{x-1}{x+1}$$

som ger

$$(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \iff xy + y - x - 1 = xy + x - y - 1 \iff x = y$$

När vi sätter in detta i den sista ekvationen får vi $(x+1)^2 = 16$, vilket ger $x = -1 \pm 4$. Eftersom $x \geq 0$ finns bara lösningen $x = y = 3$ i det givna området och värdet på funktionen blir där $f(3,3) = -3$.
Alternativt kan vi välja att parametrisera randen genom $x = 4e^t - 1$ och $y = 4e^{-t} - 1$ vilket ger funktionen

$$\begin{aligned} h(t) &= f(4e^t - 1, 4e^{-t} - 1) = 4e^t - 1 - (4e^t - 1)(4e^{-t} - 1) + 4e^{-t} - 1 \\ &= 4e^t - 1 - 16 + 4e^t + 4e^{-t} - 1 + 4e^{-t} - 1 = 8(e^t + e^{-t}) - 19. \end{aligned}$$

Vi letar sedan efter kritiska punkter till denna och får $h'(t) = 8(e^t - e^{-t})$ som är noll bara när $t = 0$. Därmed leds vi till $x = 4 - 1 = 3$ och $y = 4 - 1 = 3$ som förut. Detta är ett minimum längs randkurvan och maximum ges vid ändpunkterna.
Det återstår randpunkterna längs med axlarna. Längs x-axeln har vi $f(x, 0) = x$ och här gäller att $0 \leq x \leq 15$. Maximum där blir 15 och minimum 0. På samma sätt är det för y-axeln: $f(0, y) = y$ där $0 \leq y \leq 15$ med maximum 15 och minimum 0.

(c) Hörnpunkterna är $(0,0)$, $(15,0)$ och $(0,15)$ där funktionens värden är 0, 15 respektive 15.

Våra kandidatpunkter är: den inre stationära punkten $(1,1)$, punkten $(3,3)$ längs med den krökta randkurvan, samt punkterna längs med de linjära randsegmenten, där extremvärdena antas i ändpunkterna $(0,0)$, $(15,0)$, samt $(0,15)$. Vi jämför nu värdena i dessa punkter och finner att $f(1,1) = 1$, $f(3,3) = -3$, $f(0,0) = 0$, $f(15,0) = 15$ och $f(0,15) = 15$. Därför är minsta värde -3 och största värde 15.

Svar. Minsta värde är -3 och största värde 15.

5. Använd variabelbytet $u = x + y$, $v = y - 2x$ för att beräkna integralen

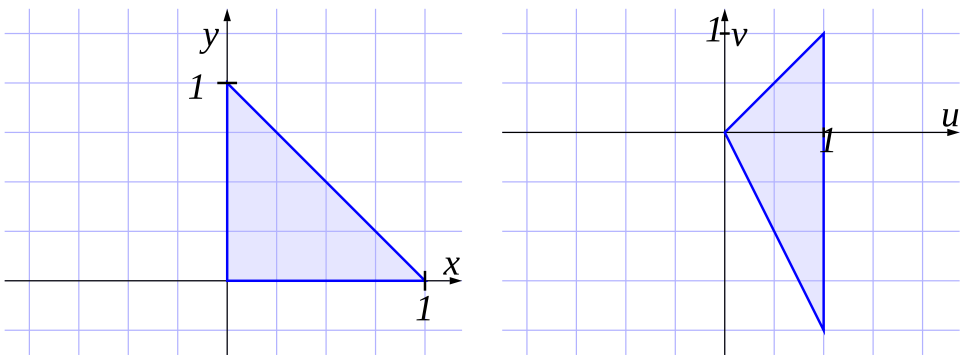
$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (y-2x)^2 \sqrt{x+y}\, dy\, dx$$

(4 p)

Lösningsförslag. Vid variabelbytet är Jacobianen

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 3$$

så att $dxdy = \frac{1}{3} dudv$. Integrationsgränserna bildar en triangel med villkoren $x \geq 0$, $y \geq 0$, och $x + y \leq 1$. Hörnen i denna triangel är $(0,0)$, $(0,1)$ och $(1,0)$. För att se hur gränserna blir i de nya variablerna kan vi se hur hörnpunkterna avbildas i och med att det är en linjär avbildning. Vi har att $(x,y) = (0,0)$ ger $(u,v) = (0,0)$, $(x,y) = (0,1)$ ger $(u,v) = (0{+}1, 1{-}2{\cdot}0) = (1,1)$ och $(x,y) = (1,0)$ ger $(u,v) = (1{+}0, 0{-}2{\cdot}1) = (1,-2)$. Denna triangel ges av olikheterna $0 \leq u \leq 1$ och $-2u \leq v \leq u$.



FIGUR 1. De två områdena

Integralen blir således lika med

$$\int_0^1 \int_{-2u}^{u} v^2 \sqrt{u}\, \frac{dv\, du}{3} = \int_0^1 \left[\frac{v^3}{9}\right]_{-2u}^{u} \sqrt{u}\, du = \int_0^1 u^3 \sqrt{u}\, du = \left[\frac{u^{9/2}}{9/2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}.$$

Svar. Integralens värde är $2/9$.

6. Vi löser en skalär ODE numeriskt med olika steglängder h där felet antas bero snällt på steglängden. Metoden ger oss approximationerna y_h av den exakta lösningen $y(1)$. Nedan listas felet i några av dessa värden.

h	$y_h - y(1)$
$0{,}2$	0,004829079851400
$0{,}1$	0,001060288025847
$0{,}05$	0,000248077100078
$0{,}025$	0,000059971929861
$0{,}0125$	0,000014722618695

TABELL 1. Fel beroende på steglängd

(a) Vilken noggrannhetsordning har metoden? **(2 p)**
(b) Uppskatta hur stort felet $y_{0{,}01} - y(1)$ skulle vara. **(2 p)**

Lösningsförslag. När felet beror snällt på steglängden gäller

$$y_h - y(1) \approx ch^p,$$

där p är noggrannhetsordningen och c är någon konstant. Det betyder att

$$\frac{y_h - y(1)}{y_{h/2} - y(1)} \approx \frac{ch^p}{ch^p 2^{-p}} = 2^p.$$

(a) Enligt tabellen,

$$\frac{y_{0{,}025} - y(1)}{y_{0{,}025/2} - y(1)} = \frac{0{,}000059971929861}{0{,}000014722618695} \approx 4 = 2^2.$$

Noggrannhetsordningen är därför 2.

(b) Eftersom $p = 2$ gäller för $h = 0{,}0125$ sambandet

$$1{,}5 \cdot 10^{-5} \approx y_{0{,}0125} - y(1) \approx c0{,}0125^2 = c80^{-2},$$

dvs

$$c \approx 80^2 \times 1{,}5 \cdot 10^{-5} = 9{,}6 \cdot 10^{-2}.$$

Det ger uppskattningen

$$y_{0{,}01} - y(1) \approx c\,0{,}01^2 \approx 9{,}6 \cdot 10^{-2} \times 10^{-4} = 9{,}6 \cdot 10^{-6}.$$

Svar.

(a) Noggrannhetsordningen är 2.
(b) Felet är $y_{0{,}01} - y(1) \approx 9{,}6 \cdot 10^{-6}$.

DEL C

7. Låt $\mathcal{S}$ vara den orienterade yta i rummet $\mathbb{R}^3$ som ges av $\mathbf{r}(s,t) = (s,t,st)$ där $s^2 + t^2 \leq 1$ och vars normalvektor har positiv z-komponent. Låt $\mathcal{C}$ vara den orienterade randkurvan till $\mathcal{S}$ och låt vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y,\ xy,\ z^2).$$

Stokes sats relaterar flödet av rotationen av ett vektorfält genom en yta med kurvintegralen av fältet längs randkurvan. Formulera Stokes sats och använd den för att beräkna kurvintegralen

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} y\,dx + xy\,dy + z^2\,dz.$$

(4 p)

Lösningsförslag. Stokes sats säger att

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{curl}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

om $\mathbf{F}$ är ett kontinuerligt deriverbart fält och $\mathcal{C}$ är den orienterade slutna randkurvan till en begränsad slät orienterad yta $\mathcal{S}$. Beräkning av rotationen för det givna vektorfältet ger att

$$\mathbf{curl}\ \mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial y}z^2 - \frac{\partial}{\partial z}xy, \frac{\partial}{\partial z}y - \frac{\partial}{\partial x}z^2, \frac{\partial}{\partial x}xy - \frac{\partial}{\partial y}y\right) = (0, 0, y-1).$$

Därför måste vi fortsätta att beräkna normalen gånger areaelementet och integrera enligt Stokes formel. Vi parametriserar ytan $\mathcal{S}$ med polära koordinater, dvs $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, och $z = xy = r^2\cos\theta\sin\theta$, där $0 \leq r \leq 1$ och $0 \leq \theta < 2\pi$. Ytelementet med normalriktning blir då

$$\mathbf{n}dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\,drd\theta = (-r^2\sin\theta, r^2\cos\theta, r)drd\theta,$$

så att

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{curl}\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r\sin\theta - 1)r\,d\theta dr = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} r\,d\theta dr = -\pi,$$

eftersom $\sin\theta$ har medelvärde noll och den sista integralen ger arean av enhetscirkeln.

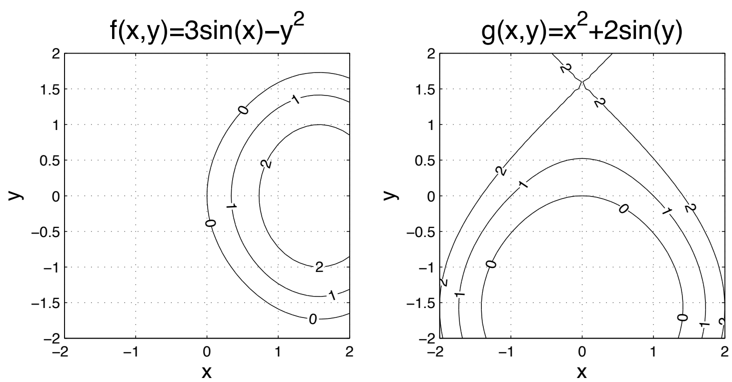
Vi kan också använda den givna parametriseringen av ytan och får då att flödet ges av integralen av av trippelprodukten

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix} = t - 1.$$

Detta ska integreras över enhetscirkeln och då t har medelvärde 0 blir integralen $-\pi$.

Svar. Kurvintegralens värde är $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} y\,dx + xy\,dy + z^2\,dz = -\pi.$

8. Newtons metod för system ska användas för att lösa ekvationssystemet $\mathbf{F}(x,y) = (2,1)$ i området $y > 0$ där $\mathbf{F}(x,y) = (3\sin(x) - y^2,\ x^2 + 2\sin(y))$.
   (a) Använd nedanstående nivåkurvor för att bestämma en bra startgissning. **(1 p)**



   (b) Skriv ett Matlabprogram som bestämmer lösningen till systemet med hjälp av Newtons metod för system. Felet i såväl x- som y-led ska vara högst 10^{-10}. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Lösningen är en punkt där nivåkurvan $f(x,y) = 2$ skär nivåkurvan $g(x,y) = 1$. Från bilden ser vi att det finns två sådana punkter. Vi uppskattar dem till $(x,y) \approx (0{,}75, 0{,}25)$ och $(x,y) \approx (1{,}5, -1{,}0)$. Eftersom y ska vara positiv väljer vi den första punkten som startgissning.

(b) Jakobimatrisen för systemet blir

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 3\cos(x) & -2y \\ 2x & 2\cos(y) \end{bmatrix}$$

Nedanstående Matlab-funktion löser systemet med Newtons metod med startgissning enligt deluppgift (a).

```
% Låt X = (X(1),X(2)) = (x,y)
% Definiera funktion och Jakobianmatris
F = @(X) [3*sin(X(1))-X(2)^2-2;
          X(1)^2+2*sin(X(2))-1];
J = @(X) [3*sin(X(1))-2*X(2);
          2*X(1)+2*cos(X(2))];
X=[0.75; 0.25]; % Startgissning, från deluppgift (a)
d=1;            % Dummy
while max(abs(d))>1e-10 % Maxnorm -- största felet
          d = -J(X) \ F(X);
          X = X + d;
end
disp(['(x,y) = (' num2str(X(1)) ', ' num2str(X(2)) ')']);
```

Om programmet körts fås $(x,y) \approx (0{,}75147, 0{,}2194)$.

9. För en given kurva $\mathcal{C}$ i planet $\mathbb{R}^2$ kan vi definiera det genomsnittliga avståndet mellan två punkter på $\mathcal{C}$ som

$$\bar{d}(\mathcal{C}) = \frac{1}{L^2}\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{C}} |\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(t)|\, dsdt,$$

där L är längden av $\mathcal{C}$ och $\mathbf{r}(t)$ är en båglängdsparametrisering av $\mathcal{C}$.

(a) Beräkna $\bar{d}(\mathcal{C})$ där $\mathcal{C}$ är linjestycket från $(0,0)$ till $(1,1)$. **(2 p)**

(b) Beräkna $\bar{d}(\mathcal{C})$ där $\mathcal{C} = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, enhetscirkeln i planet. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi båglängdsparametriserar linjestycket $y = x$ enligt $x = \frac{s}{\sqrt{2}}$ dvs $\mathbf{r}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(s,s)$ vilket ger att $|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(t)| = |s-t|$. Längden $L = \sqrt{2}$.

$$\bar{d}(\mathcal{C}) = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}} |s-t|\, dsdt = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^t (t-s)ds + \int_t^{\sqrt{2}}(s-t)ds\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}}\left(t^2 - \sqrt{2}t + 1\right) dt = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

(b) Vi båglängdsparametriserar linjestycket enligt $x = \cos t, y = \sin t$ och får att

$$|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(t)| = \sqrt{(\cos s - \cos t)^2 + (\sin s - \sin t)^2} = \sqrt{2 - \cos(s-t)}$$

$$= \sqrt{2 - 2\left((1 - 2\sin^2\frac{(s-t)}{2}\right)} = 2\left|\sin\frac{(s-t)}{2}\right|$$

Vi ser att $|\sin\frac{(s-t)}{2}|$ är en periodisk funktion och att vi integrerar över 1 period. Således påverkar translationen med t ej integralens värde. Längden av cirkeln blir 2π.

$$\bar{d}(\mathcal{C}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\left|\sin\frac{(s-t)}{2}\right|\, dsdt = \frac{1}{4\pi^2}\cdot 2\pi\int_0^{2\pi} 2\left|\sin\frac{s}{2}\right|\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{s}{2}\, ds = \frac{1}{\pi}\left[-2\cos\frac{s}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-2(-1) + (2)\right) = \frac{4}{\pi}$$

Svar.

(a) $\bar{d}(\mathcal{C}) = \sqrt{2}/3$ för linjestycket från $(0,0)$ till $(1,1)$.

(b) $\bar{d}(\mathcal{C}) = 4/\pi$ för enhetscirkeln.