Institutionen för matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Bedömningskriterier till tentamen
Onsdagen den 15 mars 2017

Allmänt gäller följande:

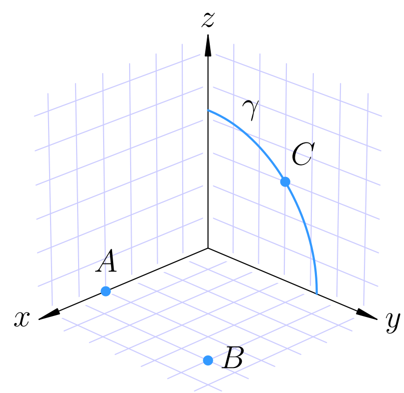
- För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.
- Om lösningen helt saknar förklarande text, eller motsvarande förklaring i form av logiska symboler, till beräkningar och formler ges högst två poäng. Detta markeras vid bedömningen med FTS (Förklarande text saknas).
- Om lösningen har förklarande text men inte tillräckligt för att det ska gå att förstå alla steg ges högst tre poäng sammanlagt på uppgiften. Detta markeras med FLFT (För lite förklarande text).
- Mindre räknefel ger i allmänhet inte avdrag om de inte ändrar uppgiftens karaktär eller leder till orimligheter som borde ha upptäckts.
- Lösningen ska kunna läsas av en person som inte är insatt i problemet i förväg. Bevisbördan ligger på den som skriver, inte på den som läser.

(1) I nedanstående rätvinkliga koordinatsystem är varje ruta en enhet lång.

(a) Bestäm de rymdpolära (sfäriska) koordinaterna för punkterna A, B och C. **(2 p)**

(b) Bestäm en parametrisering i x,y,z-koordinater av kvartscirkelbågen γ i yz-planet med medelpunkt i origo. **(1 p)**

(c) Bestäm en tangentvektor till kurvan γ i punkten C. **(1 p)**



Bedömning:

(a)
- Korrekta koordinater för en av punkterna, **1 poäng**
- Korrekta koordinater för två av punkterna, **1 poäng**

(b) Korrekt paremtrisering av γ, **1 poäng**

(c) Korrekt tangentvektor till γ i C, **1 poäng**

(2) En liten kula placeras på ovansidan av funktionsytan $z = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^2$ i punkten $(3, 2, 4)$ och börjar sedan rulla på grund av tyngdkraften som verkar nedåt i negativa z-axelns riktning.

(a) Åt vilket håll börjar den rulla om vi bortser från z-riktningen? **(3 p)**

(b) Hur brant är det där kulan släpps? **(1 p)**

Bedömning:

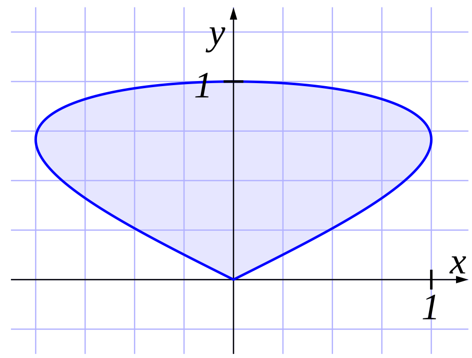
(a)
- Korrekt beräkning av gradienten till $f(x, y)$, **1 poäng**
- Korrekta beräkning av gradienten i punkten $(3, 2)$, **1 poäng**
- Korrekta riktning för kulans rörelse, **1 poäng**

(b) Korrekt lutning, **1 poäng**

(3) Arean av området som innesluts av en sluten, enkel kurva $\mathcal{C}$ kan enligt Greens formel beräknas med hjälp av en kurvintegral, $\int_{\mathcal{C}} x\,dy$ eller $\int_{\mathcal{C}} y\,dx$.

(a) Vilken orientering ska kurvan ha för att den första av integralerna ska ge arean med positivt tecken? (Glöm inte att motivera svaret.) **(1 p)**

(b) Använd någon av de två integralerna för att beräkna arean innanför kurvan som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (\sin 2t, \sin t)$, där $0 \le t \le \pi$. **(3 p)**

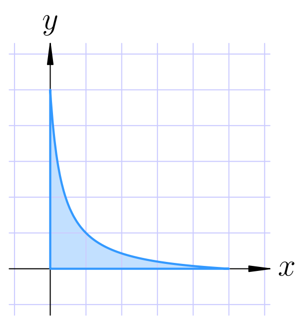


Bedömning:

(a) Korrekt motiverad orientering, **1 poäng**

(b)
- Korrekt uppställd enkelintegral med parametriseringen, **1 poäng**
- Principiellt korrekt beräknad enkelintegral, **1 poäng**
- Korrekt beräknad area, **1 poäng**

(4) Bestäm det största och minsta värdet av $f(x, y) = x - xy + y$ i området D som definieras av $x \ge 0$, $y \ge 0$, $(x + 1)(y + 1) \le 16$.



Området D

(4 p)

Bedömning:
- Korrekt hantering av kritiska punker, **1 poäng**
- Principiellt korrekt hantering av randen med Lagranges metod eller parametrisering, **1 poäng**
- Korrekt bestämda kritiska punkter den på krökta randen, **1 poäng**
- Korrekt motiverad slutsats om största och minsta värde, **1 poäng**

(5) Använd variabelbytet $u = x + y$, $v = y - 2x$ för att beräkna integralen

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 2x)^2 \sqrt{x + y}\, dy\, dx$$

(4 p)

Bedömning:

- Korrekta beräkning av den Jocobian som behövs i variabelbytet, dvs $\partial(x, y)/\partial(u, v)$, **1 poäng**
- Korrekta gränser i de nya variablerna, **1 poäng**
- Principiellt korrekt beräkning av dubbelintegralen med upprepad integration, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av dubbelintegralen, **1 poäng**

---

(6) Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet i rummet som ges av

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(e^{-y^2-z^2}, e^{-x^2-z^2}, e^{-x^2-y^2}\right).$$

Låt $\mathcal{S}$ vara den sneda kon utan botten som består av alla räta linjesegment vars ena ändpunkt är $(1, 0, 3)$ och vars andra ändpunkt ligger på cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ i xy-planet $z = 0$. Använd divergenssatsen för att beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom ytan $\mathcal{S}$ **(4 p)**

Bedömning:

- Korrekta hänvisning till divergenssatsen för att kunna förflytta beräkningen till cirkeln med radie två kring origo, **2 poäng**
- Korrekt uppställning av dubbelintegral för beräkning av flödet genom bottenytan, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av flödet, **1 poäng**

---

(7) Låt $\mathcal{S}$ vara den orienterade yta i rummet $\mathbb{R}^3$ som ges av $\mathbf{r}(s, t) = (s, t, st)$ där $s^2 + t^2 \leq 1$ och vars normalvektor har positiv z-komponent. Låt $\mathcal{C}$ vara den orienterade randkurvan till $\mathcal{S}$ och låt vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y,\ xy,\ z^2).$$

Stokes sats relaterar flödet av rotationen av ett vektorfält genom en yta med kurvintegralen av fältet längs randkurvan. Formulera Stokes sats och använd den för att beräkna kurvintegralen

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} y\, dx + xy\, dy + z^2\, dz.$$

(4 p)

Bedömning:

- Korrekta formulering av Stokes sats, **1 poäng**
- Korrekta beräkning av rotationen, **1 poäng**
- Korrekt uppställd dubbelintegral för beräkning av flödet av rotationen, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av kurvintegralen med hjälp av Stokes sats, **1 poäng**

---

(8) Låt $\mathcal{S}$ vara lösningsmängden till ekvationen

$$x^2 + y^2 = z \cos z.$$

(a) Förklara hur vi kan vara säkra på att det finns en funktion $f(x, y)$ sådan att $\mathcal{S}$ i en omgivning till punkten $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ sammanfaller med grafen $z = f(x, y)$. **(2 p)**

(b) Visa att $(x, y) = (0, 0)$ är en kritisk punkt till funktionen f. **(1 p)**

(c) Undersök om denna kritiska punkt är ett lokalt minimum, ett lokalt maximum eller ingetdera. **(1 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt hänvisning till implicita funktionssatsen, **1 poäng**
- Korrekt motivering till att implicita funktionssatsen kan användas i origo, **1 poäng**

(b) Korrekt motivering till att origo är en kritisk punkt, **1 poäng**

(c) Korrekt motivering till att origo är ett lokalt minimum, **1 poäng**

(9) För en given kurva $\mathcal{C}$ i planet $\mathbb{R}^2$ kan vi definiera det genomsnittliga avståndet mellan två punkter på $\mathcal{C}$ som

$$\bar{d}(\mathcal{C}) = \frac{1}{L^2} \int_{\mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} |\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(t)| \, dsdt,$$

där L är längden av $\mathcal{C}$ och $\mathbf{r}(t)$ är en båglängdsparametrisering av $\mathcal{C}$.

(a) Beräkna $\bar{d}(\mathcal{C})$ där $\mathcal{C}$ är linjestycket från $(0, 0)$ till $(1, 1)$. **(2 p)**

(b) Beräkna $\bar{d}(\mathcal{C})$ där $\mathcal{C} = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, enhetscirkeln i planet. **(2 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt uppställd dubbelintegral, **1 poäng**
- Korrekta slutförd beräkning av det genomsnittliga avståndet mellan punkter på linjestycket, **1 poäng**

(b)
- Korrekt uppställd dubbelintegral, **1 poäng**
- Korrekta slutförd beräkning av det genomsnittliga avståndet mellan punkter på enhetscirkeln, **1 poäng**