KTH, Matematik

Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 2)
11 april 2017 kl. 8:00-13:00

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–28 poäng, B–24, C–21, D–17, E–14, Fx–13.
Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina (masha@kth.se).
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen "Mathematics Handbook" av Råde och Westergren.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

1 a). Använd definitionen för att beräkna Z-transformen $A(z)$ av följden (a_n) där $a_n = 2$ för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$. För vilka z konvergerar $A(z)$? 1p.

Lösning: Enligt definitionen,

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{z^n} = \frac{2}{1 - 1/z} = \frac{2z}{z-1},$$

Serien är konvergent (och beräkningarna ovan har mening) för alla $|z| > 1$; för $|z| \leq 1$ är serien divergent.

b). Bestäm en talföljd (a_n) sådan att $a_0 = 0$ and

$$a_{n+1} - 3a_n = 1 + (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Lösning: Låt $A(z)$ vara Z-transform av följden (a_n). Vi har:

$$zA(z) - 3A(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+1} \Leftrightarrow A(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)} + \frac{z}{(z+1)(z-3)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$A(z) = -\frac{z/2}{z-1} - \frac{z/4}{z+1} + \frac{3z/4}{z-3}.$$

Invers transformering ger:

$$a_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(-1)^{n+1} + \frac{1}{4}3^{n+1}.$$

2. Bestäm ett polynom $p(x)$ av grad 2 som minimerar värdet av

$$\int_{-1}^{1} |\cos(\pi x/2) - p(x)|^2 dx.$$

Lösning: Betrakta rummet $L^2(-1,1)$ med den inre produkten

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Låt $P_k(x)$, $k = 0,1,2$ vara Legendres polynom av grad k. Från Beta (sid 263) får man:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Polynomen ovan är ortogonala, och $\langle P_k, P_k\rangle = 2/(2k+1)$. Det sökta polynomet $p(x)$ sammanfaller med ortogonala projektionen av funktionen $f(x) := \cos(\pi x/2)$ på delrummet spänd av $P_k(x)$, $k = 0,1,2$, dvs

$$p(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{\langle f, P_k\rangle}{\langle P_k, P_k\rangle} P_k(x)$$

Vi beräknar:$\langle f, P_1\rangle = 0$ eftersom funktionen $f(x)P_1(x)$ är udda;

$$\langle f, P_0\rangle = \int_{-1}^{1} \cos(\pi x/2)dx = \frac{4}{\pi}.$$

$$\langle f, P_2\rangle = \int_{-1}^{1} \cos(\pi x/2)\frac{1}{2}(3x^2 - 1)dx = \frac{4}{\pi^3}(\pi^2 - 12).$$

Svar: $p(x) = \frac{3(20-\pi^2)}{\pi^3} + \frac{15(\pi^2-12)}{\pi^3}x^2$.

3. Beräkna f' and f'' i distributionsmening då

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi/2 \le x \le \pi/2, \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Lösning: Vi kan skriva om funktionen i termer av Heaviside funktion:

$$f(x) = \cos x(H(x+\pi/2) - H(x-\pi/2)).$$

Derivering ger:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x(H(x+\pi/2) - H(x-\pi/2)) + \cos x(\delta(x+\pi/2) - \delta(x-\pi/2)) \\ &= -\sin x(H(x+\pi/2) - H(x-\pi/2)) \end{aligned}$$

I sista steget användes relationen $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$ som gäller för varje funktion $f(x)$ som är kontinuerlig i punkt $x = a$. En till derivering ger:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\cos x(H(x+\pi/2) - H(x-\pi/2)) - \sin x(\delta(x+\pi/2) - \delta(x-\pi/2)) \\ &= -\cos x(H(x+\pi/2) - H(x-\pi/2)) - \delta(x+\pi/2) - \delta(x-\pi/2). \end{aligned}$$

I sista steget tillämpades samma argument som ovan.

4. Antag att funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\widehat{f}(\omega)$. Vilken funktion g ska man falta f med for att få

$$\widehat{f*g}(\omega) = \begin{cases} \widehat{f}(\omega), & -3 \le \omega \le 3, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Lösning: Vi vet att $\widehat{f*g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$. Vi väljer

$$\widehat{g}(\omega) = \begin{cases} 1, & -3 \le \omega \le 3, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

I detta fall, $g(t) = \frac{\sin 3t}{\pi t}$ (Beta, F53).

5. Bestäm lösningen $u(x,t)$ till

$$\begin{aligned} &u_{xx} = u_t + 3u, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0, \qquad (E) \\ &u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0,\ t > 0; \qquad (R) \\ &u(x,0) = f(x),\ 0 < x < \pi, \qquad (B) \end{aligned}$$

där $f(x) = \sin x + 2\sin 3x$.

Lösning: Vi använder separation av variabler, dvs söker $u(x,t)$ på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$. Derivering ger:

$$X''(x)T(t) = X(x)T'(t) - 3X(x)T(t) \ \Leftrightarrow\ \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} - 3 = -\lambda = \text{ const.}$$

Randvillkoren skrivs om: $X(0)T(t) = 0$, $X(\pi)T(t) = 0$ for alla $t > 0$. Om $T(t) = 0$ for alla $t > 0$, för vi bara triviala lösningar. Därför betraktar vi fallet $X(t) = X(\pi) = 0$.

Icke-triviala lösningar till ekvationen med randvillkorna $(E) + (B)$ uppfyller följande:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad \text{där } X(t) = X(\pi) = 0,$$

samt

$$T' = (3 - \lambda)T.$$

Den andra ekvationen har lösningar $T(t) = Ce^{(3-\lambda)t}$, $C \in \mathbb{R}$.

Betrakta det första problemet. För $\lambda \le 0$ får man bara triviala lösningar (se argumentet på sid. 11 i kursboken)

För $\lambda > 0$ beteckna $\lambda = n^2$, $n > 0$. Då $X(x) = \sin nx$ är en lösning för varje $n = 1, 2, \ldots$. Lösningar till $(E) + (B)$, motsvarande $\lambda = n^2$ har alltså formen $u(x,t) = X(x)T(t) = \sin(nx)e^{(3-n^2)t}$

Enligt supperpositionsprincipen, även linjära kombinationer på formen $u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin(nx)e^{(3-n^2)t}$ ($N \ge 1$, $c_n \in \mathbb{R}$) är lösningar.

För att $u(x,0) = \sin x + 2\sin 3x$ måste $c_1 = 1$, $c_3 = 2$, och $c_n = 0$ för $n \ne 1, 3$; alltså är den sökta lösningen

$$u(x,t) = \sin x e^{2t} + 2\sin 3x e^{-6t}.$$

6. Låt $f(x)$ vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[0, \pi]$, och

$$\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx = 0 \text{ för alla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Visa att $f(x) = 0$ för alla $x \in [0, \pi]$ genom att uttnyttja det faktum att $\{\cos nx, n \geq 0; \sin nx, n \geq 1\}$ är ett fullständigt ortogonalt system i $L^2(\mathbb{T})$. Motivera alla steg!

Lösning: Betrakta rummet $L^2([0, \pi])$ av styckvis kontinuerliga funktioner på $[0, \pi]$ med inreprodukten $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x)\overline{g(x)}dx$. Vi börjar med att visa att funktioner $\psi_n(t) = \sin nt$, $n \geq 1$, formar ett fullständigt ortogonalt system i detta rum. Varje $f \in L^2([0, \pi])$ kan utvidgas till en udda funktion $\tilde{f}$ på $L^2(T)$ (man kanske behöver ändra värdet i origo). Den nya funktionens Fourierserie består bara av sinus-termer. Vi vet att $\{\cos nx, n \geq 0; \sin nx, n \geq 1\}$ är ett fullständigt ortogonalt system i $L^2(\mathbb{T})$. Detta betyder att varje funktion (och även $\tilde{f}$) kan approximeras godtyckligt väl med delsummor s_N av dess Fourierserie, dvs. för varje $\epsilon > 0$ finns N sådan att

$$\int_{\mathbb{T}} |\tilde{f}(x) - s_N(x)|^2 dx < \epsilon.$$

Detta innebär att även $\int_{[0,\pi]} |f(x) - s_N(x)|^2 dx < \epsilon$, vilket betyder att f approximeras godtyckligt bra med summor av sinusar; systemet $\psi_n(t)$, $n \geq 1$, är alltså fullständigt. Ortogonaliteten följer från att denna system är ortogonal i $L^2(\mathbb{T})$. (Se sidan 121 i kursboken för en liknande resonemang.)

Vidare, vi vet att

$$\langle f, \psi_n\rangle = \int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx = 0 \text{ för alla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Enligt Parsevals formel,

$$\int_{[0,\pi]} |f(x)|^2 dx = \|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \psi_n\rangle|^2 = 0.$$

Eftersom f är kontinuerlig, innebär detta att $f(x) = 0$ för alla $x \in [0, \pi]$.

7. a). Låt $V = L^2(\mathbb{T})$, $D_A = V \cap C^2(\mathbb{T})$, och låt operatorn A vara definierad av formeln

$$Au = u'' \text{ för alla } u \in D_A.$$

Visa att A är symmetrisk.

Lösning: Se Example 6.7 sid. 154 i kursboken.

b). Visa att alla egenvärden till en symmetrisk operator på ett inre produktrum är reella, och att egenvektorer som motsvarar olika egenvärden är ortogonala.

Lösning: Se Lemma 6.1 sid 155 i kursboken.

8. a). För vilka reella positiva värden på a är summan $\sum_{k=1}^{\infty} a^k$ konvergent i Cesaros $(C, 1)$ mening? För dessa a beräkna

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k \qquad (C, 1).$$

Lösning: Vi betraktar $s_n = \sum_{k=1}^{n} a^k = a\frac{1-a^n}{1-a}$. Dessa summor konvergerar till $\frac{a}{1-a}$ för $a < 1$. Enligt satsen, konvergerar serien till samma summa i Cesaros mening:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \frac{a}{1-a} \qquad (C, 1) \text{ för } a < 1.$$

För $a \geq 1$ är serien divergent i den vanliga meningen. Vi undersöker om summorna konvergerar i $(C, 1)$. Bildar

$$\sigma_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} s_n = \frac{a}{N(a-1)} \sum_{n=1}^{N} (a^n - 1) = \frac{a^2(a^N - 1)}{N(a-1)^2} - \frac{a}{(a-1)}.$$

Vi får $\sigma_N \to \infty$ då $N \to \infty$, dvs serien för $a \geq 1$ är divergent i $(C, 1)$ mening.

b). Vilken eller vilka av följande formler definierar en tempererad distribution: 2p.

$$T_1[\phi] = \phi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} |1 - x^2| \phi'(x) dx;$$

$$T_2[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \phi(x) dx.$$

Motivera ditt svar!

Lösning: Tempererad distribition T är en avbildning $T : \mathcal{S} \to C$ som är

1.) linjär.

2). kontinuerlig.

Låt oss börja med avbildningen T_1. Den är väl definierad på $\mathcal{S}$, och dess injäritet är uppenbar.

För att verifiera kontinuiteten, betrakta en godtycklig följd av funktioner $\phi_j(x) \in \mathcal{S}$ som konvergerar till $\psi(x) \in \mathcal{S}$ i Schwartzklassen. För denna följd behöver vi visa att $T_f[\phi_n] - T_f[\psi] \to 0$.

Konvergensen i Schwartzklassen betyder att för varje fixerade heltal $n \geq 0$, $k \geq 0$

(1) $$\lim_{j \to \infty} \max_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^n |\phi_j^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(x)| = 0.$$

Vi har:

$$|T[\phi_j] - T[\psi]| \leq |\phi_j(0) - \psi(0)| + \int_{-\infty}^{\infty} |1 - x^2| |\phi_j'(x) - \psi'(x)| dx$$

Enligt (1) med $k = n = x = 0$, $\lim_{j \to \infty} |\phi_j(0) - \psi(0)| = 0$.

Vidare, enligt (1) med $k = 1$, $n = 4$ har vi:

$$\lim_{j \to \infty} \max_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^4 |\phi_j'(x) - \psi'(x)| = 0.$$

Vi uppskattar den andra termen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |1-x^2||\phi_j'(x)-\psi'(x)|dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|1-x^2|}{(1+|x|)^4}(1+|x|)^4|\phi_j'(x)-\psi'(x)|dx$$

$$\leq \max_{x\in\mathbb{R}} \left((1+|x|)^4|\phi_j'(x)-\psi'(x)|\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|1-x^2|}{(1+|x|)^4}dx$$

Detta går mot 0 då $j \to \infty$ eftersom den sista integralen är begränsad (den konvergerar enligt jämförelsekriteriet eftersom $\frac{|1-x^2|}{(1+|x|)^4} \leq \frac{1}{x^2}$).

Formeln T_2 definierar inte en tempererad distribution eftersom det finns funktioner i Schwartz-klassen för vilka denna integral divergerar. Till exempel, $\phi(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}$, men

$$T_2[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\phi(x)dx.$$

divergerar.