FOURIERSERIER

Definition 1. (Trigonometrisk serie) Ett utryck av följande form

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\Omega x)+b_n\sin(n\Omega x)]$$

är en trigonometrisk serie.

Anmärkning: Första termen skriver vi som $\frac{a_0}{2}$ av praktiska skäl som vi förklarar nedan.

Definition 2. Låt $f(x)$ vara en *T*- periodisk funktion som är integrerbar på intervallet [–*T*/2, *T*/2]. **Fourierserien** för $f(x)$ är

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\Omega x)+b_n\sin(n\Omega x)]$$

där $\Omega=\frac{2\pi}{T}$

och **Fourierkoefficienterna** a_n och b_n ges av formlerna

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\Omega x\,dx\ , \qquad b_n=\frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin n\Omega x\,dx$$

Två frågor dyker upp direkt efter definitionen:

1. För vilka *x* är Fourierserien konvergent?
2. Är seriens summa lika med $f(x)$ i de punkter där serien konvergerar?

Svaret finns i nedanstående konvergenssatsen.

Definition 3. Vi säger att en funktion $f(x)$ är styckvis kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ om följande gäller:

1. $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$ förutom eventuellt i ändligt många punkter.

2. Om c är en diskontinuitet i (a,b) då existerar vänstergränsvärdet $\lim_{x\to c-} f(x)$ och högergränsvärdet $\lim_{x\to c+} f(x)$ i denna punkt. (I ändpunkten a existerar högergränsvärdet och i b existerar vänstergränsvärdet av $f(x)$).

KONVERGENSSATSEN för **Fourierserien**

Sats1 (Th 11.2.1 i Zill-Wright)

Låt $f(x)$ vara en T-periodisk funktion. Anta att både $f(x)$ och $f'(x)$ är styckvis kontinuerliga på $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ och att

$$S_f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\Omega x)+b_n\sin(n\Omega x)]$$

är Fourierserien som hör till $f(x)$.

Då gäller följande:

1. Fourierserien $S_f(x)$ konvergerar mot $f(x)$ i varje punkt där funktionen $f(x)$ är kontinuerlig.

2. Om c är en diskontinuitet för $f(x)$ då konvergerar Fourierserien mot $\frac{f(c_-)+f(c_+)}{2}$, där

$f(c_-)=\lim_{x\to c-} f(x)$ och $f(c_+)=\lim_{x\to c+} f(x)$

Med andra ord gäller följande (om villkoren i satsen är uppfyllda):

$S_f(x)=f(x)$ om $f(x)$ är kontinuerlig i punkten x,

$$S_f(c)=\frac{f(c_-)+f(c_+)}{2}$$ om c är en diskontinuitet för

Utveckling av udda och jämna funktioner

1. Om $f(t)$ är en jämn funktion då är $f(t)\sin n\Omega t$ en udda funktion och därför är

$b_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\Omega t\,dt = 0$ för alla n . I detta fall är $f(t)\cos n\Omega t$ en jämn funktion och

därför är $a_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega t\,dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega t\,dt$.

2. Om $f(t)$ är en udda funktion då är (samma resonemang som ovan) $a_n = 0$ medan

$b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\Omega t\,dt$ **.**

Sammanfattning för utveckling av udda och jämna funktioner:

$f(t)$ jämn $\Rightarrow$ $a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega t\,dt$ **,** $b_n = 0$

$f(t)$ udda $\Rightarrow$ $b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\Omega t\,dt$**,** $a_n = 0$

Anmärkning: Halvperiod $\frac{T}{2}$ betecknas oftast med L (ibland p som i Zill-Wright)

===

ÖVNINGAR:

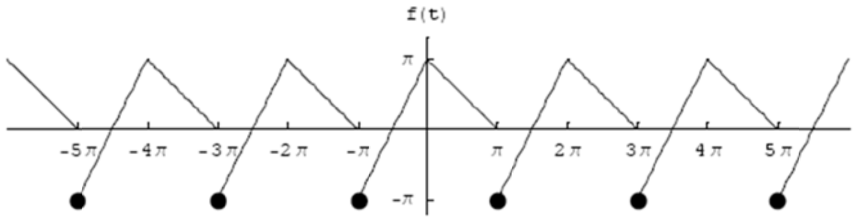
Uppgift 1. Låt $f(t) = \begin{cases} \pi + 2t, & -\pi \le t < 0 \\ \pi - t, & 0 \le t < \pi \end{cases}$ **,** $f(t + 2\pi) = f(t)$

Låt $S_f(t)$ beteckna Fourierserien till $f(t)$.

a) Rita grafen till $f(t)$ i intervallet $[-5\pi,\ 5\pi]$ och beräkna $f(-3\pi)$ and $S_f(-3\pi)$

b) Bestäm Fourierserien till $f(t)$.

Lösning: a)



$f(-3\pi) = -\pi$,

$$S_f(-3\pi) = \frac{f(-3\pi_-) + f(-3\pi_+)}{2} = \frac{-\pi}{2}$$

b) $T = 2\pi$ **,** $\Omega = \frac{2\pi}{T} = 1$**,**

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi+2t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-t)dt = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

For $n \ge 1$ we have

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega t\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi+2t)\cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-t)\cos nt\,dt = \text{(Partial integration)}$$

$$= \frac{2-2\cos n\pi}{n^2\pi} + \frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi} = \frac{3-3\cos n\pi}{n^2\pi} = \frac{3-3(-1)^n}{n^2\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\Omega t\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi+2t)\sin nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-t)\sin nt\,dt = \text{(Partial integration eller BETA)}$$

$$= \frac{-1-\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n} = \frac{-\cos n\pi}{n} = \frac{-(-1)^n}{n}$$

Svar b)

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-3(-1)^n}{n^2\pi}\cos(nt) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt)$$

Uppgift 2. a) Bestäm Fourierserien till följande funktion med perioden T= 2π

$$f(t) = -2\,|t|, \quad -\pi \le t < \pi$$
$$f(t+2\pi) = f(t).$$

b) I vilka punkter konvergerar serien till **f**(t) ?

Lösning:

Period T= 2π , $\Omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

En jämn funktion ⇒ $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi}(-2t)\,dt = \frac{4}{2\pi}[-t^2]_0^{\pi} = -2\pi \quad ,$$

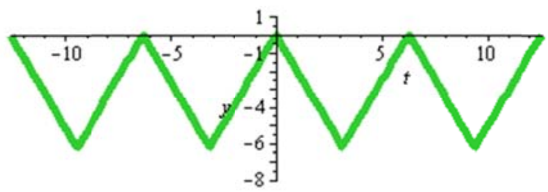
$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega t\,dt = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} -2t\cos nt\,dt = \frac{-4}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\,dt =$$

(BETA eller partiellintegration)

$$\frac{-4}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}[\cos nt + nt\sin nt]_0^{\pi} = \frac{-4((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$$

Alltså $a_n = \frac{-4((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$

$$s(t) = -\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\cos(nt)$$

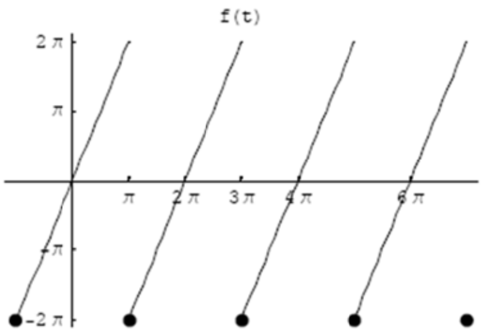


Svar: a) $s(t) = -\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nt)$

b) Funktionen är kontinuerlig och har styckvis kontinuerlig derivata. Därmed är alla krav för konvergenssatsen uppfyllda. Eftersom $f(t)$ är kontinuerlig i alla punkter så konvergerar serien mot $f(t)$ för alla t. Alltså $s(t) = f(t)$ för alla $t \in R$.

Uppgift 3. Låt

$f(t) = 2t, \quad -\pi \le t < \pi \quad , \quad f(t+2\pi) = f(t)$



i) Bestäm **a)** $f(11\pi)$, **b)** $f(\frac{9\pi}{2})$ **c)** $f(\frac{103\pi}{2})$

ii) Bestäm Fourierserien $s(t)$ till funktionen $f(t)$.

iii) Bestäm **a)** $s(\frac{\pi}{5})$ **b)** $s(\pi)$, $s(3\pi)$

Svar: i) **a)** -2π **b)** π **c)** $-\pi$

ii) $$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} (-1)^{n+1} \sin nt$$

iii) Notera att både funktionen och derivatan är styckvis kontinuerliga (dvs vilkorna för konvergensen är uppfyllda)

a) $s(\frac{\pi}{5}) = f(\frac{\pi}{5}) = \frac{2\pi}{5}$ eftersom funktionen är kontinuerlig i punkten $\frac{\pi}{5}$.

b) Funktionen är **inte kontinuerlig** i punkten π, därför $s(\pi) =$

$$\frac{f(\pi_-) + f(\pi_+)}{2} = \frac{2\pi + (-2\pi)}{2} = 0$$

c) $s(3\pi) = \frac{2\pi + (-2\pi)}{2} = 0$

Uppgift 4. Låt $f(t) = |t|$, $-\pi < t < \pi$, $f(t+2\pi) = f(t)$

a) Bestäm Fourierserien för $f(t)$.

b) Bestäm summan $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} ...$

Svar: a)

$$S_f(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2} \cos nt$$

eller $S_f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + ...\right)$

Substituera $t = 0$ i ovanstående serie

$$f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...\right) \Rightarrow$$

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...\right)$$

Svar: b) $\frac{\pi^2}{8}$

Uppgift 5. Låt $f(t) = t,\quad -\pi \le t < \pi$, $f(t+2\pi) = f(t)$

a) Visa att Fourierserien $s(t)$ till funktionen $f(t)$ är $s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin nt$

b) Beräkna summan $S = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$

Tips för b-delen: substituera $t = \frac{\pi}{2}$ i $s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin nt$.

Notera att $\sin(1 \cdot \frac{\pi}{2}) = 1$, $\sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin(3 \cdot \frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin(4 \cdot \frac{\pi}{2}) = 0, \ldots$

Svar: b) $\frac{\pi}{4}$

Uppgift 6.
Bestäm den Fourierserien till funktionen

$$f(t)=\begin{cases}2, & -\pi\le t<0\\ 3t, & 0\le t<\pi\end{cases}\quad ,\qquad f(t+2\pi)=f(t)$$

Svar: $S_f(t)=1+\dfrac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3(-1)^n-3}{\pi n^2}\cos nt+\dfrac{2(-1)^n-2-3\pi(-1)^n}{n\pi}\sin nt$

===

Bestämning av Fourierserien för en funktion som skiljer sig för en konstant från en udda eller en jämn funktion.

Anta att $f(x)=C+g(x)$ och att vi har bestämt Fourierserien $S_g(x)$ för funktionen $g(x)$.

Då är uppenbart $S_f(x)=C+S_g(x)$, där $S_f(x)$ betecknar Fourierserien för $f(x)$.

Anta att vi kan skriva

$$f(x)=C+g(x),$$

där $g(x)$ är en udda funktion. Då sparar vi tid (eftersom vi beräknar endast en integral) om vi först bestämmer Fourierserien $S_g(x)$ för funktionen $g(x)$ och därefter adderar konstanten C till resultat dvs om vi använder

$$S_f(x)=C+S_g(x).$$

Uppgift 7. (KS 3 10 okt 2016)
Bestäm den Fourierserien till funktionen

---

1) Betrakta funktionen

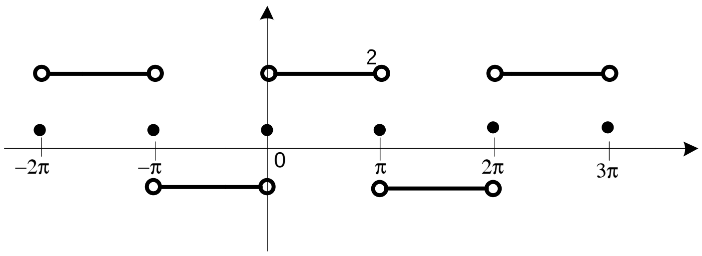
$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{if } 0\le x\le\pi\\ -1 & \text{if } -\pi<x<0.\end{cases}$$

a) Bestäm Fourierserien för f i intervallet $(-\pi,\pi)$. [2p]

b) Beräkna Fourierseriens summa i $x=3\pi/2$. [1p]

Lösning:

Grafen till $S_f(t)$ kan vi konstruera genom att periodisk utveckla $f(x)$



Metod 1. Vi ser att funktionen är "nästan" udda. Om vi drar grafen nedåt för ½ då blir grafen symmetrisk i origo. Med andra ord, om vi definierar

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$$

då är $g(x) = \begin{cases} -3/2 & om \quad -\pi < x < 0 \\ 3/2 & om \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$ en **udda** funktion.

Alltså utvecklar vi först funktionen $g(x)$ och därefter adderar 1/2

[eftersom $g(x) + \frac{1}{2} = f(x) \Rightarrow S_f(x) = \frac{1}{2} + S_g(x)$].

Här är lösningen som finns på nätet :

1) a) Observera att $f(x) - \frac{1}{2}$, $-\pi < x < \pi$, är en udda funktion varför dess Fourierserie blir en sinusserie,

$$f(x) - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

där

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{3}{2}\sin nx\,dx$$
$$= \frac{3}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi} = \frac{3(1-(-1)^n)}{n\pi}.$$

Konvergenssatsen för Fourierserier ger nu att

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1-(-1)^n}{n\pi} \sin nx, \tag{1}$$

om $-\pi < x < \pi$, $x \neq 0$. Alltså blir svaret

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1-(-1)^n}{n\pi} \sin nx,}$$

b) Högra ledet i (1) är periodisk med perioden 2π. Om vi utvidgar f periodiskt med perioden 2π så gäller (1) för alla $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. I $x = k\pi$ får vi språngdiskontinuiteter. Alltså är seriens summa i $\frac{3\pi}{2}$,

$$\boxed{f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.}$$

Metod 2 för a delen:

Vi beräknar direkt alla koefficienter. Vi får självklart samma svar som ovan, men med mycket mer beräkning (kanske 3-4 gånger längre beräkningstid.)

b) $T = 2\pi$ **,** $\Omega = \frac{2\pi}{T} = 1$**,**

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -1dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2dx = -\frac{\pi}{\pi} + \frac{2\pi}{\pi} = -1 + 2 = 1$$

For $n \geq 1$ we have

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\Omega x)dx = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -1\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[2\frac{\sin nx}{n}\right]_{0}^{\pi} = \mathbf{0.}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\Omega x)\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -1\sin(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\sin(nx)\,dx$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-2\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1-\cos(-n\pi)}{n\pi} - 2\frac{\cos(n\pi)-1}{n\pi} \quad \text{(notera att } \cos(-n\pi)=\cos(n\pi)\text{)}$$

$$= \frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi} - 2\frac{\cos(n\pi)-1}{n\pi}$$

$$= \frac{3-3\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{3-3(-1)^n}{n\pi}$$

Därmed har vi

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-3(-1)^n}{n\pi}\sin(nx)$$

(Självklart samma resultat som med metod 1 ovan, men med längre beräkningstid)

Svar a) $S_f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-3(-1)^n}{n\pi}\sin(nx)$

b) lösningen finns ovan.