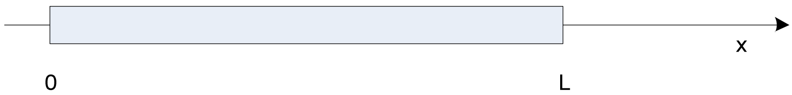
VÄRMELEDNINGSEKVATIONEN

Vi betraktar följande PDE

$$k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad 0<x<L, \quad t>0 \qquad \text{(ekv1)}$$

, där k>0 är en konstant.

Ekvationen (ekv1) kan bl. annat beskriva värmeledningen i en tunn stav där $u(x,t)$ betecknar temperaturen i punkten x vid tiden t.



därför namn" värmeledningsekvation".

Randvärdesproblemet består av (ekv 1) och tre villkor exempelvis:

Villkor 1: $u(0,t)=0$, för alla $t>0$, Villkor 2: $u(L,t)=0$ för alla $t>0$,

och

Villkor 3: $u(x,0)=f(x)$ för $0<x<L$.

Villkor 1 och 2 betyder då att **temperaturen=0** i stavens ändpunkter för alla t>0.

Villkor 3 (begynnelsevillkoret) visar **värmefördelning vid tiden t=0**.

Vi betraktar följande randvärdesproblem:

Bestäm $u(x,t)$ som uppfyller värmeledningsekvationen

$$k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad 0<x<L, \quad t>0 \qquad \text{(ekv1)}$$

och följande villkor:

V1: $u(0,t)=0$, för alla $t>0$, V2: $u(L,t)=0$ för alla $t>0$.

V3: $u(x,0)=f(x)$ för $0<x<L$,

där $f(x)$ är en given funktion.

Om $f(x)\equiv 0$ då har problemet den triviala lösningen $u(x,t)\equiv 0$. I fortsättning antar vi att $f(x)$ **inte är identisk 0**. Därmed **förkastas lösningen** $u(x,t)\equiv 0$ eftersom den inte uppfyller V3 (och bidrar med 0 i summan av produktlösningarna som vi bildar i Fouriermetoden).

Anmärkning: Tecknet $\equiv$ betyder ”identisk lika”.

Lösning till ovanstående randvärdesproblem:

Vi börjar med produktansatsen och variabelseparation. Låt

$u(x,t) = X(x)Y(t)$. (P1).

Vi substituerar P1 i (ekv1) och får

$kX''(x)Y(t) = Y'(t)X(x)$ eller

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{Y'(t)}{Y(t)} \quad (*)$$

Eftersom vänsterledet beror av *x* och högerledet enbart av *t*, måste de vara konstanta och ha samma värde som vi betecknar med $-\lambda$. (Vi betecknar konstanten med $-\lambda$ för att efterlikna beteckning i kursboken, annars kan vi använda λ.)

Alltså

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{Y'(t)}{Y(t)} = -\lambda \quad (**)$$ där λ är ett reellt tal (just nu vilket som helst).

Från (**) får vi två enkla ODE med konstanta koefficienter:

Från $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$ och $\frac{1}{k} \cdot \frac{Y'(t)}{Y(t)} = -\lambda$ får vi

$X'' + \lambda X = 0$ (ekv a)

och

$Y' + \lambda kY = 0$ (ekv b).

Lösningen till (ekv a) beror på λ. Vi betraktar tre fall $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ och $\lambda > 0$

I) Om $\lambda = 0$ blir ovanstående ekvationer

$X'' = 0$ och $Y' = 0$ som ger

$X = Ax + B$ och $Y = C$.

Därmed blir $u(x,t) = X(x)Y(t) = C(Ax + B)$ (notera att CA är en konstant)

eller $u(x,t) = Ax + B$.

II) Om $\lambda < 0$ kan vi av praktiska skäll beteckna $\lambda = -\alpha^2$ där α är ett positivt tal.

Från (ekv a) får vi $X'' - \alpha^2 X = 0$ som gör $X = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$.

Från (ekv b) har vi $Y' - k\alpha^2 Y = 0$ som ger $Y = Ce^{k\alpha^2 t}$

Därmed $u(x,t) = X(x)Y(t) = (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})\, e^{k\alpha^2 t}$, där $\alpha > 0$

III) Om $\lambda > 0$ kan vi beteckna $\lambda = \alpha^2$ där α är ett positivt tal.

Från (ekv a) får vi $X'' + \alpha^2 X = 0$ som gör $X = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$.

Från (ekv b) får vi $Y' + k\alpha^2 Y = 0$ som ger $Y = Ce^{-k\alpha^2 t}$.

Därmed $u(x,t) = X(x)Y(t) = (A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x))\, e^{-k\alpha^2 t}$, där $\alpha > 0$

Sammanfattningsvis har vi fått följande produktlösningar till (ekv1):

I) $u(x,t) = Ax + B$ (om $\lambda = 0$)

II) $u(x,t) = (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})\, e^{k\alpha^2 t}$, där $\alpha > 0$

III) $u(x,t) = (A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x))\, e^{-k\alpha^2 t}$, där $\alpha > 0$ (just nu vilket som helst positivt tal).

Frågan är vilka av ovanstående lösningar uppfyller också villkoren V1,V2 och V3.

(Vi ska snart visa att **endast fall 3** är intressant för oss i detta problem eftersom I och II leder till den triviala lösningen $u(x,t) \equiv 0$

Vi börjar med s. k. homogena villkor V1 och V2 (som har 0 i högerled) .
Först anpassar vi V1 och V2 till vår produktlösning.

Eftersom $u(x,t) = X(x)Y(t)$ kan vi skriva

V1: $u(0,t) = 0$, för alla $t > 0$, som $X(0)Y(t) = 0$ för alla $t > 0$.

Detta ger $X(0) = 0$ eller $Y(t) \equiv 0$. Men, eftersom $Y(t) \equiv 0$ ger $u(x,t) \equiv 0$ kvarstår att

$X(0) = 0$.

På samma sätt drar vi slutsats att V2: $u(L,t) = 0$ för alla $t > 0$, medför $X(L)Y(t) = 0$ och därmed $X(L) = 0$.

Nu undersöker vi vilka produktlösningar som uppfyller

V1’ : $X(0) = 0$ och V2’ : $X(L) = 0$.

I) Om $X = Ax + B$ då får vi från V1’ och V2’ att B=0 och A=0. Därför blir X $\equiv$ 0 som ger den triviala lösningen $u(x,t) \equiv 0$. Därmed utesluter vi typ I lösningar.

På liknande sätt kan vi visa att typ II lösningar också leder till $u(x,t) \equiv 0$ eftersom

$$A + B = 0$$
$$Ae^{\alpha L} + Be^{-\alpha L} = 0$$

medför $A = 0$, $B = 0$ (eftersom $e^{\alpha L} \neq 0$ och $e^{-\alpha L} \neq 0$) som ger X≡0 och $u(x,t) \equiv 0$. Därför uteslutas fall II.

Kvarstår lösningar av typ III dvs $X = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$. Vi ska bestämma alla värden på α så att X uppfyller både V1' och V2'.

V1': Från $X(0) = 0$ har vi $A\cos(0) + B\sin(0) = 0 \Rightarrow A = 0$.

Alltså $X = B\sin(\alpha x)$.

V2': Från $X(L) = 0$ har vi $B\sin(\alpha L) = 0$.

Härav $\sin(\alpha L) = 0$ (eftersom B=0 leder till triviala lösningen) , och därför

$\alpha L = n\pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{n\pi}{L}$ där $n = 1,2,3,4,\ldots$ (notera att $\alpha > 0$ enligt antagande).

Därför är $X = B\sin(\dfrac{n\pi}{L}x)$ och därmed

$u(x,t) = XY = Be^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin(\dfrac{n\pi}{L}x)$ där $n = 1,2,3,4,\ldots$ (och B en konstant vilken som hels).

Funktionerna $u(x,t) = Be^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin(\dfrac{n\pi}{L}x)$ uppfyller (ekv1) och homogena villkor V1 och V2. Samma gäller för en linjär kombination av sådana funktioner (eftersom ekvationen och två villkor V1,V2 är homogena). Sådana lösningar (generellt) uppfyller inte villkor 3 dvs villkoret

$u(x,0) = f(x)$ för $0 < x < L$.

Vi ska undersöka om vi kan bilda en oändlig serie (med obestämda koefficienter c_n)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

så att serien uppfyller villkor 3. Substitutionen av serien i villkoret

$u(x,0) = f(x)$ för $0 < x < L$, får vi

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) = f(x). \qquad \text{(ekv2)}}$$

Från (ekv2) ser vi att c_n är Fourierkoefficienter vid utveckling av $f(x)$ i sinusserie på intervallet [0,L]. (Notera att $\Omega = \frac{\pi}{L}$ och $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{L}} = 2L$).

Med andra ord bestämmer vi

$$c_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\Omega x)\,dx = \frac{4}{2L}\int_0^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx$$

och därefter $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L}x)$.

==

Exempel 1.

a) Bestäm $u(x,t)$ som uppfyller värmeledningsekvationen

$$15\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0 \qquad \text{(ekv1)}$$

och följande villkor:

V1: $u(0,t) = 0$, för alla $t > 0$, V2: $u(2,t) = 0$ för alla $t > 0$.

V3: $u(x,0) = x$ för $0 < x < 2$,

b) Samma uppgift som ovan med nytt

V3: $u(x,0) = 28\sin(\frac{3\pi}{2}x) + 43\sin(4\pi x)$ för $0 < x < 2$,

Lösning:

a) I vårt fall är L=2 (och därmed perioden T=4), k=15, $f(x) = x$

Vi upprepar ovanstående härledning (gör detta varje gång du löser en värmeledning ekv) och får

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L}x).$$

Koefficienterna c_n bestäms så att

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) = f(x).$$

dvs c_n är Fourierkoefficienter vid utveckling av $f(x)$ i sinusserie på intervallet [0,L].

(Notera att $\Omega = \frac{\pi}{L}$ och $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{L}} = 2L$).

Med andra ord bestämmer vi

$$c_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\Omega x)\,dx = \frac{4}{2L}\int_0^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx$$

$$= \frac{4}{4}\int_0^{2} x\sin(\frac{n\pi}{2}x)\,dx \text{ = (part int eller BETA) } = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Därmed $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L}x) =$ (subs: k=15, L=2 och $c_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi} e^{-15\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin(\frac{n\pi}{2}x).$$

Svar: a) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi} e^{-15\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin(\frac{n\pi}{2}x)$.

b) Anmärkning (Ett speciellt fall) Om vi ska utveckla $f(x)$ i en sinusserie på halvintervallet[0,L] och om $f(x)$ redan är **en linjär kombination av sinusbasfunktionerna** $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ då kan vi helt enkelt bestämma c_n genom att identifiera koefficienter som står framför lika basfunktioner. Detta gör vi i denna exempel.

(Liknande gäller vid utveckling i cosinusserie av en funktion som är en linjär kombination av cosinusbasfunktionerna.)

Vi gör på samma sätt upp till användning av Villkor 3.

Alltså $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L}x)$.

Koefficienterna c_n bestäms så att

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) = f(x)$ dvs så att

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi}{2}x) = 28\sin(\frac{3\pi}{2}x) + 43\sin(4\pi x)$$

Den här gången är $f(x)$ redan en linjär kombination av några (två i vårt fall) basfunktioner $\sin(\frac{n\pi}{2}x)$, Vi behöver INTE använda formeln för utveckling i sinusserie utan vi helt enkelt **jämför koefficienter** på båda sidor:

$\sin\frac{3\pi}{2}x$ är lika med $\sin(\frac{n\pi}{2}x)$ för n=3 därför c_3=28

$\sin(4\pi x) = \sin\frac{8\pi}{2}$ är lika med $\sin(\frac{n\pi}{2}x)$ för n=8 därför c_8=43

Alla andra koefficienter är 0 dvs $c_n = 0$ om $n \neq 3$ och $n \neq 8$

Därför är

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L}x) = c_3 e^{-k\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 t} \sin(\frac{3\pi}{L}x) + c_8 e^{-k\left(\frac{8\pi}{L}\right)^2 t} \sin(\frac{8\pi}{L}x)$$

$$= 28 e^{-15\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 t} \sin(\frac{3\pi}{2}x) + 43 e^{-15\left(\frac{8\pi}{2}\right)^2 t} \sin(\frac{8\pi}{2}x)$$

Svar b) $u(x,t) = 28 e^{-15\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 t} \sin(\frac{3\pi}{2}x) + 43 e^{-15\left(\frac{8\pi}{2}\right)^2 t} \sin(\frac{8\pi}{2}x)$

Uppgift 1. Bestäm $u(x,t)$ som uppfyller värmeledningsekvationen

$$14 \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0 \qquad \text{(ekv1)}$$

och följande villkor:

V1: $u(0,t) = 0$, för alla $t > 0$, V2: $u(2,t) = 0$ för alla $t > 0$.

V3: $u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 \text{ för } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ för } 1 < x < 2 \end{cases}$

Lösning:

Vi använder $u(x,t) = X(x)Y(t)$, separerar variabler och får

$X'' + \lambda X = 0$,

$X(0) = 0$, X(L)=0

och $Y' + \lambda kY = 0$

Vi har tre möjliga lösningar till X och Y:

I) $X = Ax + B$, Y=C (om $\lambda = 0$)

II) $X = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$, $Y = Ce^{k\alpha^2 t}$ där $\alpha > 0$, $\lambda = -\alpha^2$

III) $X = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$, $Y = Ce^{-k\alpha^2 t}$ där $\alpha > 0$ $\lambda = \alpha^2$.

Sammanfattningsvis har vi fått följande produktlösningar till (ekv1):

I) $u(x,t) = Ax + B$ (om $\lambda = 0$)

II) $u(x,t) = (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})e^{k\alpha^2 t}$, där $\alpha > 0$

III) $u(x,t) = (A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x))e^{-k\alpha^2 t}$, där $\alpha > 0$ (just nu vilket som helst positivt tal).

Frågan är vilka av ovanstående lösningar uppfyller också villkoren V1,V2 och V3.

Villkoren V1: $u(0,t) = 0$, för alla $t > 0$, V2: $u(2,t) = 0$ för alla $t > 0$.

ger $X(0) = 0$, X(L)=0 **eliminerar första 2 fall** (de gör triviala lösningar). Kvarstår

$X = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$,

Vi substituerar X(0)=0 och får $A\cos(0) + B\sin(0) = 0$ dvs $A + 0 = 0$ därmed $A = 0$ och

$X = B\sin(\alpha x)$.

Nu substituerar vi X(L)=0 och får $B\sin(\alpha L) = 0$ som ger $\alpha L = n\pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{n\pi}{L}$ där

$n = 1,2,3,4,\ldots$ (där $\alpha > 0$ $\lambda = \alpha^2$).

Alltså $X = B\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ där $n = 1,2,3,4,\ldots$ (och $\alpha > 0$ enligt antagande).

Funktionerna $u(x,t) = XY = B\sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$ uppfyller (ekv1) och homogena villkor V1 och V2.

Vi bildar serien $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ och bestämmer c_n så att Villkor 3

dvs $u(x,0) = f(x)$ är också uppfylld.

Alltså $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) = f(x)$.

Med andra ord är c_n Fourierkoefficienter vid utveckling av $f(x)$ i sinusserie på intervallet [0,L]. (Notera att $\Omega = \frac{\pi}{L}$ och $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{L}} = 2L$).

Därför

$$c_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\Omega x)\,dx = \frac{4}{4}\int_0^{2} f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx$$

(L=2 i vårt fall men funktionen är 0 för 0<x<2)

$$= \frac{4}{4}\int_0^{1} \sin(\frac{n\pi}{2}x)\,dx = \left[-\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2}x)\right]_0^1 = \frac{-2}{n\pi}\left[\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1\right].$$

Slutligen $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin(\frac{n\pi}{L}x) =$ (k=14, L=2, $c_n = \frac{-2}{n\pi}\left[\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1\right]$)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[1-\cos(\frac{n\pi}{2})\right]e^{-14\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t}\sin(\frac{n\pi}{2}x)$$

Svar: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[1-\cos(\frac{n\pi}{2})\right]e^{-14\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t}\sin(\frac{n\pi}{2}x)$

===

Anmärkning . Homogena villkor V1, V2, i randvärdesproblem för en värmeledningsekvation kan anges i andra former. Tex om staven är **isolerad** i punkten x=0 då är $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$.

Om staven är **isolerad** i punkten x=L då är $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$.

Då ändras homogena villkor till

V1: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ för alla $t > 0$, V2: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$ för alla $t > 0$

Sådana villkor leder till en cosinusserie som vi ser i nästa uppgift.

Uppgift 2.

a) Lös följande randvärdesproblem

$$k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \qquad \text{(ekv1)}$$

och följande villkor:

V1: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ för alla $t > 0$, V2: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$ för alla $t > 0$

V3: $u(x,0) = f(x)$, $0 < x < L$

b) Lös samma problem om k =5, L=10, $f(x) = 1 + x$

Lösning:

Vi använder $u(x,t) = X(x)Y(t)$, separerar variabler och får

$X'' + \lambda X = 0$,

$X(0) = 0$, X(L)=0

och $Y' + \lambda kY = 0$

Vi har tre möjliga lösningar till X och Y:

I) $X = Ax + B$, Y=C $Y = Ce^{k\alpha^2 t}$ (om $\lambda = 0$)

II) $X = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$, där $\alpha > 0$, $\lambda = -\alpha^2$

III) $X = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$, $Y = Ce^{-k\alpha^2 t}$ där $\alpha > 0$ $\lambda = \alpha^2$.

Sammanfattningsvis har vi fått följande produktlösningar till (ekv1):

I) $u(x,t) = Ax + B$ (om $\lambda = 0$)

II) $u(x,t) = (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})e^{k\alpha^2 t}$, där $\alpha > 0$

III) $u(x,t) = (A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x))e^{-k\alpha^2 t}$, där $\alpha > 0$ (just nu vilket som helst positivt tal).

Frågan är vilka av ovanstående lösningar uppfyller också villkoren V1,V2 och V3.

Villkoren $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ för alla $t > 0$, V2: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$ för alla $t > 0$

ger

V1' $X'(0) = 0$, och V2' $X'(L) = 0$ (*).

(Villkorna V1 och Ve eliminerar endast fall II som vi ser nedan.)

Fall I) Från $X = Ax + B$ har vi $X' = A$ så att $X'(0) = 0$ ger A=0 samtidigt $X'(L) = 0$ ger igen A=0. Därför $X = B$ är en (icke trivial) konstant lösning som satisfierar ekv1, V1 och V2.

Fall II) leder endast till triviala lösningen X=0 och därmed förkastas.

Kvarstår III) $X = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$,

Härav $X' = -\alpha A\sin(\alpha x) + \alpha B\cos(\alpha x)$.

Från V1' dvs från $X'(0) = 0$ har vi $-\alpha A\sin(0) + \alpha B\cos(0) = 0$ som ger B=0.

Därmed $X = A\cos(\alpha x)$ (och $X' = -\alpha A\sin(\alpha x)$).

Från V2' dvs från $X'(L) = 0$ får vi nu $-\alpha A\sin(\alpha x) = 0$. Härav

$\alpha L = n\pi$ dvs $\alpha = \frac{n\pi}{L}$, där $n = 1,2,3,4,\ldots$ ($\alpha > 0$ $\lambda = \alpha^2$).

Därmed $X = A\cos(\frac{n\pi}{L}x)$

Produktlösningar $u(x,t) = A\cos(\frac{n\pi}{L}x)e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$ uppfyller ekv1,V1 och V2.

Vi bildar serien $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos(\frac{n\pi}{L}x)$ och bestämmer c_n så att Villkor 3

dvs $u(x,0) = f(x)$ är också uppfylld.

Notera att ***n*=0 är också inkluderad i** summan eftersom vi utvecklar i **cosinusserie** och dessutom en konstant funktion är lösning enligt I).

Altså $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) = f(x)$.

Med andra ord är c_n Fourierkoefficienter vid utveckling av $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)$ i **cosinusserie** på intervallet [0,L]. (Notera att T=1L, $\Omega = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}$).

Därför

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx\,\textbf{,}$$

$$c_n = a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\Omega x)\,dx\,\textbf{,} \qquad n=1,2,3,\ldots.$$

När vi bestämmer c_n då är $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos(\frac{n\pi}{L}x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos(\frac{n\pi}{L}x)$.

Svar a) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos(\frac{n\pi}{L}x)$ där $c_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\Omega x)\,dx$**.**

b) Om k=5, L=10, $f(x) = 1 + x$ får vi (T=2L) $\Omega = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{10}$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{20}\int_0^{10}(1+x)\,dx = 6$$

$c_n = \frac{4}{20}\int_0^{10}(1+x)\cos(\frac{n\pi}{10}x)\,dx$ = (beräkna själv)= $\frac{20((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}$.

Därför $u(x,t) = 6+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{20((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\cos(\frac{n\pi}{L}x)$.

Svar: $u(x,t) = 6+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{20((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\cos(\frac{n\pi}{L}x)$.