LAPLACES EKVATION

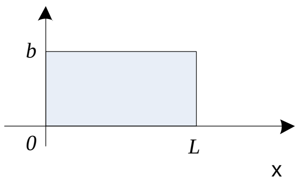
Vi betraktar följande PDE

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\,, \quad 0<x<a\,, \quad 0<y<b \qquad \text{(ekv1)}$$

som kallas **Laplaces ekvation.**

Ekvationen (ekv1) kan beskriva en s.k. stationär tillstånd (steady-state) för en fysikalisk process.

Randvärdesproblemet består av (ekv 1) och fyra villkor som innehåller värden av funktionen (eller dess derivator) längs de fyra sidorna av rektangeln $0<x<a\,, \quad 0<y<b$.



För att lösa ett sådant randvärdesproblem använder vi följande tre steg:

Steg 1. Med hjälp av variabelseparation bestämmer vi alla produktlösningar $u(x,y)=X(x)Y(y)$.

Steg 2. Bland lösningar som vi får i steg 1, väljer vi de som uppfyller givna homogena villkor,

(sådana betecknar vi med $u_n(x,y)$)

Steg 3. Slutligen bildar vi en oändlig summa $u(x,y)=\sum u_n(x,y)$ av lösningar i steg 2 och bestämmer koefficienter så att $u(x,y)$ uppfyller det icke-homogena villkoret (eller de icke-homogena villkoren)

===

Anmärkning 1. Funktionen $u(x,y)\equiv 0$ är en lösning (den triviala lösningen) till ekvationen och homogena villkor men inte till icke-homogena villkor. I fortsättning antar vi att minst ett villkor är icke-homogen, Därmed **förkastas lösningen** $u(x,y)\equiv 0$

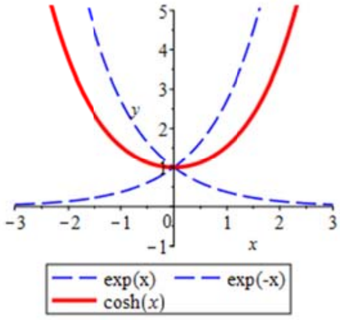
===

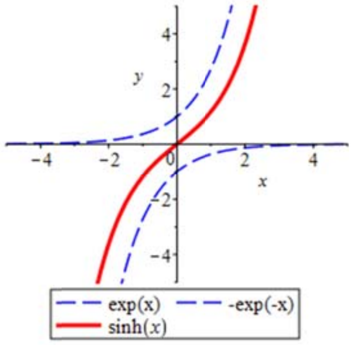
Anmärkning 2. I några uppgifter med Laplaces ekvation är det lämpligt att använda hyperboliska funktioner $\cosh(x)$ och $\sinh(x)$ som definieras enligt följande

$$\cosh(x) \stackrel{def}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{och} \quad \sinh(x) \stackrel{def}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Med andra ord är $\cosh(x)$ är medelvärdet av e^x och e^{-x},

medan är $\sinh(x)$ medelvärdet av e^x och $-e^{-x}$. Detta ger att vi enkelt ritar grafen till funktionerna:





Följande viktiga egenskaper kommer direkt från definitionen:

$\cosh(0) = 1$, $\sinh(0) = 0$

$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$, $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$,

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Notera mellan hyperboliska och trigonometriska funktioner, bl. annat:

$\cosh(x)$ **saknar nollställen**, $\sinh(x)$ har endast **ett nollställe** $x = 0$.

Exempel 1. Bestäm den allmänna lösningen till $y'' - 16y = 0$. Ange svaret med både exponentialfunktioner och trigonometriska funktioner.

Lösning: Ansatsen $y = e^{rx}$ ger den karakteristiska ekvationen

$r^2 - 16 = 0 \Rightarrow r = \pm 4$. Därför är e^{4x} och e^{-4x} linjärt oberoende baslösningar och därmed är $y = Ae^{4x} + Be^{-4x}$ den allmänna lösningen.

Eftersom $\cosh(4x) = \frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2}$ och $\sinh(4x) = \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2}$ är också linjärt oberoende lösningar kan vi ange den allmänna lösningen på formen

$y = C\cosh(4x) + D\sinh(4x)$.

Anmärkning 3. På liknande sätt kan vi i allmänt ange den allmänna lösningen till $y'' - \alpha^2 y = 0$, där $\alpha > 0$ på två olika sätt:

$y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$,

$y = C\cosh(\alpha x) + D\sinh(\alpha x)$

Vi använder det sätt som är mest praktiskt i en uppgift.

Uppgift 1.

Lös PDE med tillhörande randvillkor:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < b \qquad \text{(ekv1)}$$

Villkor 1: $u(0,y) = 0$, för $0 < y < b$ Villkor 2: $u(L,y) = 0$ för alla $0 < y < b$,

Villkor 3: $u(x,0) = 0$ för $0 < x < L$, Villkor 4: $u(x,b) = f(x) = 5$ för $0 < x < L$,

Lösning:

Steg 1:

Vi börjar med produktansatsen och variabelseparation. Låt

$u(x,y) = X(x)Y(y)$. (P1).

Vi substituerar P1 i (ekv1) och får

$$X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x) = 0 \quad \text{eller}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \qquad (*)$$

Eftersom vänsterledet beror av *x* och högerledet enbart av *y*, måste de vara konstanta och ha samma värde som vi betecknar med $-\lambda$. (Vi betecknar konstanten med $-\lambda$ för att efterlikna beteckning i kursboken, annars kan vi använda λ.)

Alltså

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \qquad (**)$$ där λ är ett reellt tal (just nu vilket som helst).

Från (**) får vi två enkla ODE med konstanta koefficienter:

Från $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$ och $\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$ får vi

$X'' + \lambda X = 0$ (ekv a)

och

$Y'' - \lambda Y = 0$ (ekv b).

Vi betraktar tre fall $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ och $\lambda > 0$

I) Om $\lambda = 0$ blir ovanstående ekvationer

$X'' = 0$ och $Y'' = 0$ som ger

$X = Ax + B$ och $Y = Cy + D$.

Därmed blir $u(x, y) = X(x)Y(y) = (Ax + B)(Cy + D)$.

II) Om $\lambda < 0$ kan vi av praktiska skäll beteckna $\lambda = -\alpha^2$ där α är ett positivt tal.

Från (ekv a) får vi $X'' - \alpha^2 X = 0$ som gör $X = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$

Vi kan även använda $X = A\cosh(\alpha x) + B\sinh(\alpha x)$ som är ibland enklare att hantera.

Från (ekv b) har vi $Y'' + \alpha^2 Y = 0$ som ger $Y = C\cos(\alpha y) + D\sin(\alpha y)$

Därmed $u(x, y) = X(x)Y(y) = (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})\big(C\cos(\alpha y) + D\sin(\alpha y)\big)$, där $\alpha > 0$.

Allternativt kan vi skriva

$u(x, y) = (A\cosh(\alpha x) + B\sinh(\alpha x))\big(C\cos(\alpha y) + D\sin(\alpha y)\big)$,

III) Om $\lambda > 0$ kan vi beteckna $\lambda = \alpha^2$ där α är ett positivt tal.

Från (ekv a) får vi $X'' + \alpha^2 X = 0$ som gör $X = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$.

Från (ekv b) får vi $Y'' - \alpha^2 Y = 0$ som ger $Y = C\cosh(\alpha y) + D\sinh(\alpha y)$.

Därmed

$u(x, y) = X(x)Y(y) = (A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x))(C\cosh(\alpha y) + D\sinh(\alpha y))$, där $\alpha > 0$

Sammanfattningsvis har vi fått följande produktlösningar till (ekv1):

I) $u(x, y) = (Ax + B)(Cy + D)$ (om $\lambda = 0$)

II) $u(x,y) = (A\cosh(\alpha x) + B\sinh(\alpha x))\big(C\cos(\alpha y) + D\sin(\alpha y)\big)$, där $\alpha > 0$

III) $u(x,y) = (A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x))(C\cosh(\alpha y) + D\sinh(\alpha y))$, där $\alpha > 0$ (just nu är α vilket som helst positivt tal).

(*Anmärkning*: Vi kan beteckna konstanter med olika bokstäver i I, II och III t. ex. A_1, A_2, A_3 $B_1, B_2, B_3 \ldots$, men då blir beteckningen krånglig.)

Steg 2:

Frågan är vilka av ovanstående lösningar uppfyller också villkoren V1,V2 ,V3 och V4.

(Vi ska snart visa att **endast fall III** är intressant för oss i detta problem eftersom I och II leder till den triviala lösningen $u(x,y) \equiv 0$ som inte uppfyller V 4.)

Vi börjar med s. k. homogena villkor (som har 0 i högerled) i vårt fall V1 och V2 .

Notera att $u(x,y) \equiv 0$ **inte** är en lösning till problemet eftersom den triviala lösningen **inte** uppfyller icke-homogent villkor 4.
Först anpassar vi V1 och V2 till vår produktlösning.

Eftersom $u(x,y) = X(x)Y(y)$ kan vi skriva

V1: $u(0,y) = 0$, för $0 < y < b$ som $X(0)Y(y) = 0$ för $0 < y < b$.

Detta ger $X(0) = 0$ eller $Y(y) \equiv 0$. Men, eftersom $Y(y) \equiv 0$ ger $u(x,y) \equiv 0$ kvarstår att

$X(0) = 0$.

På samma sätt drar vi slutsats att V2: $u(L,y) = 0$ medför $X(L)Y(y) = 0$ och därmed $X(L) = 0$.

Nu undersöker vi vilka produktlösningar som uppfyller

V1' : $X(0) = 0$ och V2' : $X(L) = 0$.

I) Om $X = Ax + B$ då får vi från V1' och V2' att B=0 och A=0. Därför blir X $\equiv$ 0 som ger den triviala lösningen $u(x,0) \equiv 0$ som i sin tur inte uppfyller V4. Därmed utesluter vi typ I lösningar.

II) På liknande sätt kan vi visa att typ II lösningar också leder till $u(x,y) \equiv 0$ eftersom

Från villkor V1' har vi:

$A\cosh(0) + B\sinh(0) = 0$ som ger $A = 0$,

därefter $B\sinh(\alpha L) = 0$ som ger $B = 0$, eftersom $\sinh(\alpha L) = 0$ endast om αL =0 (*notera skillnaden mellan den hyperboliska och den trigonometriska sinusfunktionen*)

Därför utesluter vi fall II.

III) Kvarstår lösningar av typ III dvs $X = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$ (och därmed $Y = C\cosh(\alpha y) + D\sinh(\alpha y)$).

Vi ska bestämma alla värden på α så att X uppfyller både V1' och V2'.

V1': Från $X(0) = 0$ har vi $A\cos(0) + B\sin(0) = 0 \Rightarrow A = 0$.

Alltså $X = B\sin(\alpha x)$.

V2': Från $X(L) = 0$ har vi $B\sin(\alpha L) = 0$.

Härav $\sin(\alpha L) = 0$ (eftersom B=0 leder till triviala lösningen) , och därför

$\alpha L = n\pi \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{L}$ där $n = 1,2,3,4,\ldots$ (notera att $\alpha > 0$ enligt antagande).

Därför är $X = B\sin(\frac{n\pi}{L}x)$, där $n = 1,2,3,4,\ldots$ och B en konstant.

och därmed (notera att $\alpha = \frac{n\pi}{L}$ och BC och BD är konstanter).

Villkor V4: $u(x,0) = 0$ för $0 < x < L$, som är också homogen, ger

$X(x)Y(0) = 0$ dvs $Y(0) = 0$. . (Om $X(x) \equiv 0$ då $u(x,y) \equiv 0$ **).**

Vi tillämpar $Y(0) = 0$ på $Y = C\cosh(\alpha y) + D\sinh(\alpha y)$ (där $\alpha = \frac{n\pi}{L}$) och får

$C\cosh(0) + D\sinh(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Därför $Y = D\sinh(\alpha y) = D\sinh(\frac{n\pi}{L}y)$ och därmed är

$$u_n(x,y) = c_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sinh(\frac{n\pi}{L}y) , \quad n=1,2,3,\ldots$$

tillhörande produktlösningar. De uppfyller ekv1, V1, V2 och V3.

Steg 3:

Vi ska undersöka om vi kan bilda en oändlig serie (med obestämda koefficienter c_n)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sinh(\frac{n\pi}{L}y) \quad \text{(ekv2)}$$

så att serien uppfyller villkor 4. Substitutionen av serien i villkoret

$u(x,b)= f(x)=5$ för $0<x<L$, ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sinh(\frac{n\pi}{L}b)= f(x).$$

eller

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \sinh(\frac{n\pi}{L}b)\right)\sin(\frac{n\pi}{L}x)= f(x)=5. \qquad \text{(ekv3)}$$

Från (ekv2) ser vi att $c_n \sinh(\frac{n\pi}{L}b)$ är Fourierkoefficienter vid utveckling av $f(x)$ (i vårt fall $f(x)=5$) sinusserie på intervallet [0,L]. (Notera att $\Omega=\frac{\pi}{L}$ och $T=\frac{2\pi}{\Omega}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{L}}=2L$).

> Man kan inse detta genom att jämföra
>
> vänster ledet i ekv 2: $VL=\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \sinh(\frac{n\pi}{L}b)\right)\sin(\frac{n\pi}{L}x)$
>
> med höger ledet i (ekv 2) utvecklad i Fourierserie:
>
> $HL=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$.

Då ser man att $c_n \sinh(\frac{n\pi}{L}b)=b_n$ för n=1,2,3,…

Med andra ord

$$c_n \sinh(\frac{n\pi}{L}b)=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\Omega x)\,dx = (\text{i vårt fall } f(x)=5) =$$

$$=\frac{4}{2L}\int_0^{L} 5\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx=\frac{2}{L}\int_0^{L} 5\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx=$$

$$=\left[\frac{10}{L}\cdot\frac{-L}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{L}x)\right]_0^{L}=\frac{-10((-1)^n-1)}{n\pi}=\frac{10(1-(-1)^n)}{n\pi}.$$

Alltså: $c_n \sinh(\frac{n\pi}{L}b)=\dfrac{10(1-(-1)^n)}{n\pi}$.

Härav $c_n = \dfrac{10(1-(-1)^n)}{n\pi \sinh(\frac{n\pi}{L} b)}$

Slutligen substituerar vi $c_n = \dfrac{10(1-(-1)^n)}{n\pi \sinh(\frac{n\pi}{L} b)}$ i (ekv 2) och får

lösningen till problemet

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10(1-(-1)^n)}{n\pi \sinh(\frac{n\pi}{L} b)} \sin(\frac{n\pi}{L} x) \sinh(\frac{n\pi}{L} y).$$

==

I nedanstående uppgift är V3 och V4 homogena villkor (som leder till (Y(0)=0 och Y(b)=0).

(Typ II lösningar blir intressanta i det här fallet)

Uppgift 2. (Jämför upp 12.5. 7 i Zill-Wrigt för $L = \pi$ och $b = \pi$ och en mindre ändring i villkor 2)

Lös PDE med tillhörande randvillkor:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < b \qquad \text{(ekv1)}$$

Villkor 1: $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = u(0,y)$, för $0 < y < b$ Villkor 2: $u(L,y) = f(y) = 4$ för alla $0 < y < b$,

Villkor 3: $u(x,0) = 0$ för $0 < x < L$, Villkor 4: $u(x,b) = 0$ för $0 < x < L$,

Lösning:

Steg 1

På samma sätt som i Uppgift 1 får vi produktlösningar $u(x,y) = X(x)Y(y)$ till (ekv1):

I) $u(x,y) = (Ax+B)(Cy+D)$ (om $\lambda = 0$)

II) $u(x,y) = (A\cosh(\alpha x) + B\sinh(\alpha x))(C\cos(\alpha y) + D\sin(\alpha y))$, där $\alpha > 0$

III) $u(x,y) = (A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x))(C\cosh(\alpha y) + D\sinh(\alpha y))$, där $\alpha > 0$ (just nu är α vilket som helst positivt tal).

Steg 2. Vi ska vissa att endast typ II lösningar uppfyller V3 och V4.

Vi anpassar homogena villkor V3: och V4: till produkt lösningar $u(x, y) = X(x)Y(y)$:

$u(x,0) = 0$ för $0 < x < L$ d.v.s. $X(x)Y(0) = 0$ för $0 < x < L$ ger $Y(0) = 0$.

På liknande sätt $u(x,b) = 0$ för $0 < x < L$ ger $Y(b) = 0$.

Detta tillämpas på produktläsningar i ovanstående tre fall I , II och III:

I) $u(x, y) = (Ax + B)(Cy + D)$

Om vi använder $Y(0) = 0$ och $Y(b) = 0$ på lösningar i I där $Y = (Cy + D)$ får vi C=0 och D=0 d.v.s. Y=0 och därmed blir $u(x, y) = X(x)Y(y) \equiv 0$ som vi förkastar.

II) $u(x, y) = (A\cosh(\alpha x) + B\sinh(\alpha x))\big(C\cos(\alpha y) + D\sin(\alpha y)\big)$, där $\alpha > 0$

Här är $Y = C\cos(\alpha y) + D\sin(\alpha y)$.

$Y(0) = 0$ ger $C\cos(0) + D\sin(0) = 0 \Rightarrow C = 0$ och därför $Y = D\sin(\alpha y)$.

Från $Y(b) = 0$ har vi $D\sin(\alpha b) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{b}$.

Alltså $Y = D\sin(\frac{n\pi}{b} y)$.

Motsvarande produktlösningar i fall II har formen

$$(A\cosh(\frac{n\pi}{b} x) + B\sinh(\frac{n\pi}{b} x)) \cdot \sin(\frac{n\pi}{b} y).$$

Men, villkor V1 (som kan skrivas som $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) - u(0, y) = 0$) är också homogen med avseende på $u(x, y)$ och dess derivator.

Vi tillämpar V1 för att ännu mer förenkla produktlösningar.

Från $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = u(0, y)$, för $0 < y < b$ har vi $X'(0)Y(y) = X(0)Y(y)$ eller

$[X'(0) - X(0)]Y(y) = 0$ som ger $X'(0) = X(0)$ (eftersom $Y(y) = 0$ ger den triviala lösningen).

Alltså V1 ger $X'(0) = X(0)$.

Från $X = A\cosh(\frac{n\pi}{b} x) + B\sinh(\frac{n\pi}{b} x)$ har vi

$$X' = A\frac{n\pi}{b}\sinh(\frac{n\pi}{b}x) + B\frac{n\pi}{b}\cosh(\frac{n\pi}{b}x).$$

Därför $X'(0) = X(0) \Rightarrow A = B\frac{n\pi}{b}$.

Alltså $X = B\frac{n\pi}{b}\cosh(\frac{n\pi}{b}x) + B\sinh(\frac{n\pi}{b}x)$

Produkt lösningar

$$u = XY = B\left[\frac{n\pi}{b}\cosh(\frac{n\pi}{b}x) + \sinh(\frac{n\pi}{b}x)\right]\cdot\sin(\frac{n\pi}{b}y) \text{ eller}$$

$$u_n(x,y) = c_n\left[\frac{n\pi}{b}\cosh(\frac{n\pi}{b}x) + \sinh(\frac{n\pi}{b}x)\right]\cdot\sin(\frac{n\pi}{b}y).$$

uppfyller ekv1 och homogena villkor V1, V3 och V4 .

III) Det är enkelt att typ III lösningar, tillsammans med villkor 3 och 4, ger endast triviala lösningen den här gången. (Kontrollera själv)

Steg 3:

Vi ska undersöka om vi kan bilda en oändlig serie (med obestämda koefficienter c_n)

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[\frac{n\pi}{b}\cosh(\frac{n\pi}{b}x) + \sinh(\frac{n\pi}{b}x)\right]\cdot\sin(\frac{n\pi}{b}y) \qquad \text{(ekv 2)}$$

så att serien uppfyller villkor 2.

Substitutionen av serien i villkoret

$u(b,y) = f(y) = 4$ ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[\frac{n\pi}{b}\cosh(\frac{n\pi}{b}L) + \sinh(\frac{n\pi}{b}L)\right]\cdot\sin(\frac{n\pi}{b}y) = f(y)$$

Från (ekv2) ser vi att $c_n\left[\frac{n\pi}{b}\cosh(\frac{n\pi}{b}L) + \sinh(\frac{n\pi}{b}L)\right]$ är Fourierkoefficienter vid utveckling av $f(y)$ (i vårt fall $f(y) = 4$) sinusserie på intervallet [0,b]. (Notera att $\Omega = \frac{\pi}{b}$ och $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}} = 2b$).

Alltså $c_n\left[\frac{n\pi}{b}\cosh(\frac{n\pi}{b}L)+\sinh(\frac{n\pi}{b}L)\right]=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(y)\sin(n\Omega y)\,dx =$ (i vårt fall $f(y)=4$) =

$$=\frac{4}{2b}\int_0^b 4\sin(\frac{n\pi}{L}y)\,dy=\frac{2}{b}\int_0^b 4\sin(\frac{n\pi}{b}y)\,dy=$$

$$=\left[\frac{8}{b}\cdot\frac{-b}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{b}y)\right]_0^b=\frac{-8((-1)^n-1)}{n\pi}=\frac{8(1-(-1)^n)}{n\pi}.$$

Alltså: $c_n\left[\frac{n\pi}{b}\cosh(\frac{n\pi}{b}L)+\sinh(\frac{n\pi}{b}L)\right]=\frac{10(1-(-1)^n)}{n\pi}$.

Härav $c_n=\dfrac{10(1-(-1)^n)}{n\pi\left[\frac{n\pi}{b}\cosh(\frac{n\pi}{b}L)+\sinh(\frac{n\pi}{b}L)\right]}$

substitutionen i ekv 2 ger svaret:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10(1-(-1)^n)}{n\pi\left[\frac{n\pi}{b}\cosh(\frac{n\pi}{b}L)+\sinh(\frac{n\pi}{b}L)\right]}\left[\frac{n\pi}{b}\cosh(\frac{n\pi}{b}x)+\sinh(\frac{n\pi}{b}x)\right]\cdot\sin(\frac{n\pi}{b}y)$$