ORDINÄRA DIFFERENTIALEKVATIONER MED PERIODISKA HÖGERLED

(Tillämpning av Fourierserie)

Vi betraktar DE L(y)=f(x) vars högerled är en allmän periodiskfunktion.

Vi använder följande steg:

Steg 1. Vi löser tillhörande homogena DE

Steg 2. Vi utvecklar högerledet i tillhörande Fourierserie.

Steg 3. En partikulär lösning bestämmer vi med hjälp av ansatsen som är en trigonometrisk serie med obestämda koefficienter (c_n och d_n)

$$y_p(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos(n\Omega x) + d_n \sin(n\Omega x))$$

som vi substituerar i DE. Högerledet ersätts med Fourierserien .

Steg 4. Vi identifierar koefficienter framför basfunktionerna $\cos(n\Omega x)$ och $\sin(n\Omega x)$.

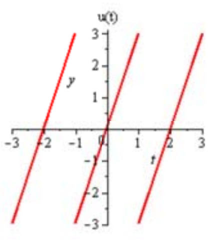
Steg 5. $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Uppgift 1.

Bestäm den allmänna lösningen till följande DE med **periodiska högerleden**

$$y'(t) + 2y(t) = u(t) \qquad \text{(ekv1)}$$

där $u(t) = 3t, \quad -1 \le t < 1, \; u(t+2) = u(t)$.



Lösning:

Steg 1. Först homogena delen:

$$y'(t) + 2y(t) = 0 \,,$$

$y_H = Ce^{-2t}$ (***lösningen till den homogena delen***).

Steg 2. Nu bestämmer vi en partikulörlösning till (ekv1).

Eftersom ekvationens högerled, $u(t)$, är en periodisk funktion bestämmer vi Fourierserien för $u(t)$ med $T=2$, $\Omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$

Funktionen $u(t)$ är en udda funktion på intervallet $-1<t<1$ eftersom $u(-t)=-u(t)$ och därför

$a_n=0, \quad n=1,2,3...$

För $n\geq 1$ vi har

$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} u(t)\sin n\Omega t\,dt=2\int_0^{\frac{T}{2}} 3t\sin(n\pi t)\,dt=$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u=6t, & v'=\sin(n\pi t) \\ u'=6, & v=\dfrac{-\cos(n\pi t)}{n\pi} \end{array}}$$

(part. integration)

$$-6t\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\Bigg|_0^1+\int_0^1 6\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}dt=$$

$$-6\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}+6\frac{\sin(n\pi t)}{n^2\pi^2}\Bigg|_0^1=\frac{-6(-1)^n}{n\pi}+0$$

$$=\frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Alltså: $u(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi t)$.

Steg 3. Vi gör en ansats i form av en trigonometrisk serie:

$$y_p(t)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\pi t+d_n\sin n\pi t).$$

Både $y_p(t)$ och $u(t)$ substitueras i ekvationen

$$y'(t)+2y(t)=u(t) \qquad \text{(ekv1)}$$

Vi får

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-n\pi c_n\sin n\pi t+n\pi d_n\cos n\pi t)+2[\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\pi t+d_n\sin n\pi t)]=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi t)$$

Steg 4. Identifiering av koefficienterna som står framför $\cos n\pi t$ och $\sin n\pi t$ ger systemet

$$\begin{cases} \frac{2c_0}{2} = 0 \\ -n\pi c_n + 2d_n = \frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi} \\ 2c_n + n\pi d_n = 0 \end{cases}$$

Från systemet får vi

$$c_0 = 0, \qquad c_n = \frac{-6(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2+4} = \frac{6(-1)^n}{n^2\pi^2+4} \text{ och } d_n = \frac{12(-1)^{n+1}}{n\pi(n^2\pi^2+4)}$$

Alltså **en partikulär lösning** är

$$y_p(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos n\Omega t + d_n \sin n\Omega t)$$

$$y_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{6(-1)^n}{n^2\pi^2+4}\cos(n\pi t) + \frac{12(-1)^{n+1}}{n\pi(n^2\pi^2+4)}\sin(n\pi t)\right]$$

Steg 5. Den allmänna lösningen:

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t) =$$

$$Ce^{-2t} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{6(-1)^n}{n^2\pi^2+4}\cos(n\pi t) + \frac{12(-1)^{n+1}}{n\pi(n^2\pi^2+4)}\sin(n\pi t)\right]$$

Svar: $y(t) = Ce^{-2t} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{6(-1)^n}{n^2\pi^2+4}\cos(n\pi t) + \frac{12(-1)^{n+1}}{n\pi(n^2\pi^2+4)}\sin(n\pi t)\right]$

Uppgift 2.

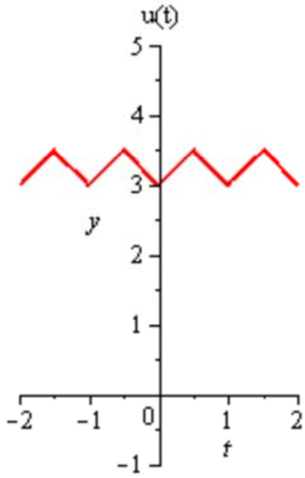
Bestäm den allmänna lösningen till

$$y'(t) + 4y(t) = u(t) \qquad \textit{(ekv1)}$$

där $u(t)$ är följande periodiska funktion med perioden 1

$$u(t) = 3 + |t|, -\frac{1}{2} \le t < \frac{1}{2}, \qquad u(t+1) = u(t).$$

Lösning:



Steg 1. Homogena delen

$$y'(t) + 4y(t) = 0,$$

ger $y_H = Ce^{-4t}$ (***lösningen till den homogena delen***).

Steg 2. Nu bestämmer vi en partikulörlösning till ***(ekv1)***

Eftersom ekvationens högerled, $u(t)$, är en periodisk funktion bestämmer vi Fourierserien för

$u(t)$: $T = 1$ **,** $\Omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

Funktionen f(t) är en jämn funktion på intervallet $-\frac{1}{2} \le t < \frac{1}{2}$ eftersom $u(-t)=u(t)$ och därför

$b_n = 0, \quad n = 1,2,3...$

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} u(t)\, dt = 13/2$$

För $n \ge 1$ vi har vi $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} u(t) \cos n\Omega t\, dt = ... = \frac{[(-1)^n - 1]}{n^2\pi^2}$

Alltså $u(t) = \frac{13}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \cos 2n\pi t$.

Steg 3. Vi gör en lösningsansats i form av en Fourierserie:

$$y_p(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos n\Omega t + d_n \sin n\Omega t)\,.$$

Både $y_p(t)$ och $u(t)$ substitueras i ekvationen

$y'(t) + 4y(t) = u(t)$ ***(ekv1).***

Härav

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-2n\pi c_n \sin 2n\pi t + 2n\pi d_n \cos 2n\pi t) + 4[\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos 2n\pi t + d_n \sin 2n\pi t)] =$$

$$\frac{13}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos 2n\pi t$$

Identifiering av koefficienterna som står framför $\cos n\pi t$ och $\sin n\pi t$ ger systemet

$$\begin{cases} \dfrac{4c_0}{2} = \dfrac{13}{4} \\ 4c_n + 2n\pi\, d_n = \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \\ -2n\pi\, c_n + 4d_n = 0 \qquad \Rightarrow \end{cases}$$

Från systemet får vi

$$c_0 = \frac{13}{8}, \qquad c_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2(n^2\pi^2 + 4)} \text{ och } d_n = \frac{(-1)^n - 1}{2n\pi(n^2\pi^2 + 4)}$$

Alltså är **en partikulär lösning**

$$y_p(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos n\Omega t + d_n \sin n\Omega t)$$

$$y_p(t) = \frac{13}{16} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2(n^2\pi^2 + 4)}\cos(2n\pi t) + \frac{(-1)^n - 1}{2n\pi(n^2\pi^2 + 4)}\sin(2n\pi t)\right]$$

Den allmänna lösningen:

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t) =$$

$$Ce^{-4t} + \frac{13}{16} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2(n^2\pi^2 + 4)}\cos(2n\pi t) + \frac{(-1)^n - 1}{2n\pi(n^2\pi^2 + 4)}\sin(2n\pi t)\right]$$

Svar: $y(t) = Ce^{-4t} + \dfrac{13}{16} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2(n^2\pi^2 + 4)}\cos(2n\pi t) + \frac{(-1)^n - 1}{2n\pi(n^2\pi^2 + 4)}\sin(2n\pi t)\right]$