

LAPLACES EKVATION

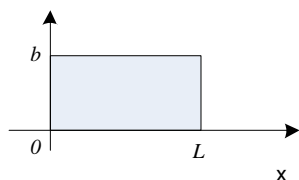
Vi betraktar följande PDE

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad (\text{ekv1})$$

som kallas **Laplaces ekvation**.

Ekvationen (ekv1) kan beskriva en s.k. stationär tillstånd (steady-state) för en fysikalisk process.

Randvärdesproblemet består av (ekv 1) och fyra villkor som innehåller värden av funktionen (eller dess derivator) längs de fyra sidorna av rektangeln $0 < x < a$, $0 < y < b$.



För att lösa ett sådant randvärdesproblem använder vi följande tre steg:

Steg 1. Med hjälp av variabelseparation bestämmer vi alla produktlösningar $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

Steg 2. Bland lösningar som vi får i steg 1, väljer vi de som uppfyller givna homogena villkor, (sådana betecknar vi med $u_n(x, y)$)

Steg 3. Slutligen bildar vi en oändlig summa $u(x, y) = \sum u_n(x, y)$ av lösningar i steg 2 och bestämmer koefficienter så att $u(x, y)$ uppfyller det icke-homogena villkoret (eller de icke-homogena villkoren)

=====

Anmärkning 1. Funktionen $u(x, y) \equiv 0$ är en lösning (den triviala lösningen) till ekvationen och homogena villkor men inte till icke-homogena villkor. I fortsättning antar vi att minst ett villkor är icke-homogen, Därmed **förkastas lösningen** $u(x, y) \equiv 0$

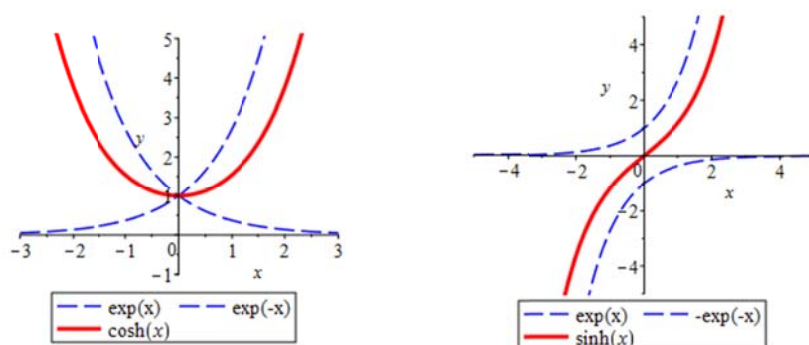
=====

Anmärkning 2. I några uppgifter med Laplaces ekvation är det lämpligt att använda hyperboliska funktioner $\cosh(x)$ och $\sinh(x)$ som definieras enligt följande

$$\cosh(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{och} \quad \sinh(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Med andra ord är $\cosh(x)$ är medelvärdet av e^x och e^{-x} ,

medan är $\sinh(x)$ medelvärdet av e^x och $-e^{-x}$. Detta ger att vi enkelt ritat grafen till funktionerna:



Följande viktiga egenskaper kommer direkt från definitionen:

$$\cosh(0) = 1, \quad \sinh(0) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x), \quad \frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x),$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Notera mellan hyperboliska och trigonometriska funktioner, bl. annat:

$\cosh(x)$ saknar nollställen, $\sinh(x)$ har endast ett nollställe $x = 0$.

Exempel 1. Bestäm den allmänna lösningen till $y'' - 16y = 0$. Ange svaret med både exponentialfunktioner och trigonometriska funktioner.

Lösning: Ansatsen $y = e^{rx}$ ger den karakteristiska ekvationen

$r^2 - 16 = 0 \Rightarrow r = \pm 4$. Därför är e^{4x} och e^{-4x} linjärt oberoende baslösningar och därmed är $y = Ae^{4x} + Be^{-4x}$ den allmänna lösningen.

Eftersom $\cosh(4x) = \frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2}$ och $\sinh(4x) = \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2}$ är också linjärt oberoende

lösningar kan vi ange den allmänna lösningen på formen

$$y = C \cosh(4x) + D \sinh(4x).$$

Anmärkning 3. På liknande sätt kan vi i allmänt ange den allmänna lösningen till $y'' - \alpha^2 y = 0$, där $\alpha > 0$ på två olika sätt:

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x},$$

$$y = C \cosh(\alpha x) + D \sinh(\alpha x)$$

Vi använder det sätt som är mest praktiskt i en uppgift.

Uppgift 1.

Lös PDE med tillhörande randvillkor:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < b \quad (\text{ekv1})$$

Villkor 1: $u(0, y) = 0$, för $0 < y < b$ Villkor 2: $u(L, y) = 0$ för alla $0 < y < b$,

Villkor 3: $u(x, 0) = 0$ för $0 < x < L$, Villkor 4: $u(x, b) = f(x) = 5$ för $0 < x < L$,

Lösning:

Steg 1:

Vi börjar med produktansatsen och variabelseparation. Låt

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (\text{P1}).$$

Vi substituerar P1 i (ekv1) och får

$$X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x) = 0 \quad \text{eller}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad (*)$$

Eftersom vänsterledet beror av x och högerledet enbart av y , måste de vara konstanta och ha samma värde som vi betecknar med $-\lambda$. (Vi betecknar konstanten med $-\lambda$ för att efterlikna beteckning i kursboken, annars kan vi använda λ .)

Alltså

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \quad (**) \quad \text{där } \lambda \text{ är ett reellt tal (just nu vilket som helst).}$$

Från (**) får vi två enkla ODE med konstanta koefficienter:

Från $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$ och $\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$ får vi

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (\text{ekv a})$$

och

$$Y'' - \lambda Y = 0 \quad (\text{ekv b}).$$

Vi betraktar tre fall $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ och $\lambda > 0$

I) Om $\lambda = 0$ blir ovanstående ekvationer

$$X'' = 0 \quad \text{och} \quad Y'' = 0 \quad \text{som ger}$$

$$X = Ax + B \quad \text{och} \quad Y = Cy + D.$$

Därmed blir $u(x, y) = X(x)Y(y) = (Ax + B)(Cy + D)$.

II) Om $\lambda < 0$ kan vi av praktiska skäl beteckna $\lambda = -\alpha^2$ där α är ett positivt tal.

Från (ekv a) får vi $X'' - \alpha^2 X = 0$ som gör $X = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$

Vi kan även använda $X = A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x)$ som är ibland enklare att hantera.

Från (ekv b) har vi $Y'' + \alpha^2 Y = 0$ som ger $Y = C \cos(\alpha y) + D \sin(\alpha y)$

Därmed $u(x, y) = X(x)Y(y) = (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})(C \cos(\alpha y) + D \sin(\alpha y))$, där $\alpha > 0$.

Allternativt kan vi skriva

$$u(x, y) = (A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x))(C \cos(\alpha y) + D \sin(\alpha y)),$$

III) Om $\lambda > 0$ kan vi beteckna $\lambda = \alpha^2$ där α är ett positivt tal.

Från (ekv a) får vi $X'' + \alpha^2 X = 0$ som gör $X = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$.

Från (ekv b) får vi $Y'' - \alpha^2 Y = 0$ som ger $Y = C \cosh(\alpha y) + D \sinh(\alpha y)$.

Därmed

$$u(x, y) = X(x)Y(y) = (A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x))(C \cosh(\alpha y) + D \sinh(\alpha y)), \quad \text{där } \alpha > 0$$

Sammanfattningsvis har vi fått följande produktlösningar till (ekv1):

I) $u(x, y) = (Ax + B)(Cy + D)$ (om $\lambda = 0$)

$$\text{II) } u(x, y) = (A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x))(C \cos(\alpha y) + D \sin(\alpha y)), \text{ där } \alpha > 0$$

$$\text{III) } u(x, y) = (A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x))(C \cosh(\alpha y) + D \sinh(\alpha y)), \text{ där } \alpha > 0 \text{ (just nu är } \alpha \text{ vilket som helst positivt tal).}$$

(Anmärkning: Vi kan beteckna konstanter med olika bokstäver i I, II och III t. ex. A_1, A_2, A_3 , B_1, B_2, B_3, \dots , men då blir beteckningen krånglig.)

Steg 2:

Frågan är vilka av ovanstående lösningar uppfyller också villkoren V1, V2, V3 och V4.

(Vi ska snart visa att **endast fall III** är intressant för oss i detta problem eftersom I och II leder till den triviala lösningen $u(x, y) \equiv 0$ som inte uppfyller V4.)

Vi börjar med s. k. homogena villkor (som har 0 i högerled) i vårt fall V1 och V2.

Notera att $u(x, y) \equiv 0$ **inte** är en lösning till problemet eftersom den triviala lösningen **inte** uppfyller icke-homogent villkor 4.

Först anpassar vi V1 och V2 till vår produktlösning.

Eftersom $u(x, y) = X(x)Y(y)$ kan vi skriva

$$\text{V1: } u(0, y) = 0, \text{ för } 0 < y < b \text{ som } X(0)Y(y) = 0 \text{ för } 0 < y < b.$$

Detta ger $X(0) = 0$ eller $Y(y) \equiv 0$. Men, eftersom $Y(y) \equiv 0$ ger $u(x, y) \equiv 0$ kvarstår att $X(0) = 0$.

På samma sätt drar vi slutsats att V2: $u(L, y) = 0$ medför $X(L)Y(y) = 0$ och därmed $X(L) = 0$.

Nu undersöker vi vilka produktlösningar som uppfyller

$$\text{V1' : } X(0) = 0 \quad \text{och} \quad \text{V2' : } X(L) = 0.$$

I) Om $X = Ax + B$ då får vi från V1' och V2' att $B=0$ och $A=0$. Därför blir $X \equiv 0$ som ger den triviala lösningen $u(x, 0) \equiv 0$ som i sin tur inte uppfyller V4. Därmed utesluter vi typ I lösningar.

II) På liknande sätt kan vi visa att typ II lösningar också leder till $u(x, y) \equiv 0$ eftersom

Från villkor V1' har vi:

$$A \cosh(0) + B \sinh(0) = 0 \text{ som ger } A = 0,$$

därefter $B \sinh(\alpha L) = 0$ som ger $B = 0$, eftersom $\sinh(\alpha L) = 0$ endast om $\alpha L = 0$ (notera skillnaden mellan den hyperboliska och den trigonometriska sinusfunktionen)

Därför utesluter vi fall II.

III) Kvarstår lösningar av typ III dvs $X = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$ (och därmed $Y = C \cosh(\alpha y) + D \sinh(\alpha y)$).

Vi ska bestämma alla värden på α så att X uppfyller både V1' och V2'.

V1': Från $X(0) = 0$ har vi $A \cos(0) + B \sin(0) = 0 \Rightarrow A = 0$.

Alltså $X = B \sin(\alpha x)$.

V2': Från $X(L) = 0$ har vi $B \sin(\alpha L) = 0$.

Härav $\sin(\alpha L) = 0$ (eftersom $B=0$ leder till triviala lösningen), och därför

$$\alpha L = n\pi \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{L} \quad \text{där } n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (\text{notera att } \alpha > 0 \text{ enligt antagande}).$$

Därför är $X = B \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, där $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ och B en konstant.

Villkor V3: $u(x, 0) = 0$ för $0 < x < L$, som är också homogen, ger

$$X(x)Y(0) = 0 \text{ dvs } Y(0) = 0. \quad (\text{Om } X(x) \equiv 0 \text{ då } u(x, y) \equiv 0).$$

Vi tillämpar $Y(0) = 0$ på $Y = C \cosh(\alpha y) + D \sinh(\alpha y)$ (där $\alpha = \frac{n\pi}{L}$) och får

$$C \cosh(0) + D \sinh(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Därför $Y = D \sinh(\alpha y) = D \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$ och därmed är

$$u_n(x, y) = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right), \quad n=1, 2, 3, \dots$$

tillhörande produktlösningar. De uppfyller ekv1, V1, V2 och V3.

Steg 3:

Vi ska undersöka om vi kan bilda en oändlig serie (med obestämda koefficienter c_n)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \quad (\text{ekv2})$$

så att serien uppfyller villkor 4. Substitutionen av serien i villkoret

$u(x, b) = f(x) = 5$ för $0 < x < L$, ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}b\right) = f(x).$$

eller

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}b\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x) = 5. \quad (\text{ekv3})$$

Från (ekv3) ser vi att $c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}b\right)$ är Fourierkoefficienter vid utveckling av $f(x)$ (i vårt fall

$f(x) = 5$) sinusserie på intervallet $[0, L]$. (Notera att $\Omega = \frac{\pi}{L}$ och $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{L}} = 2L$).

Man kan inse detta genom att jämföra

$$\text{vänster ledet i ekv 2: } VL = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}b\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

med höger ledet i (ekv 2) utvecklad i Fourierserie:

$$HL = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Då ser man att $c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}b\right) = b_n$ för $n=1, 2, 3, \dots$

Med andra ord

$$c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}b\right) = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(n\Omega x) dx = (\text{i vårt fall } f(x) = 5) =$$

$$= \frac{4}{2L} \int_0^L 5 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L 5 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx =$$

$$= \left[\frac{10}{L} \cdot \frac{-L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]_0^L = \frac{-10((-1)^n - 1)}{n\pi} = \frac{10(1 - (-1)^n)}{n\pi}.$$

$$\text{Alltså: } c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}b\right) = \frac{10(1 - (-1)^n)}{n\pi}.$$

$$\text{Härav } c_n = \frac{10(1 - (-1)^n)}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi}{L}b\right)}$$

Slutligen substituerar vi $c_n = \frac{10(1 - (-1)^n)}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi}{L}b\right)}$ i (ekv 2) och får

lösningen till problemet

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10(1 - (-1)^n)}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi}{L}b\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right).$$

=====

I nedanstående uppgift är V3 och V4 homogena villkor (som leder till $Y(0)=0$ och $Y(b)=0$).

(Typ II lösningar blir intressanta i det här fallet)

Uppgift 2. (Jämför upp 12.5. 7 i Zill-Wright för $L = \pi$ och $b = \pi$ och en mindre ändring i villkor 2)

Lös PDE med tillhörande randvillkor:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < b \quad (\text{ekv1})$$

Villkor 1: $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = u(0, y)$, för $0 < y < b$ Villkor 2: $u(L, y) = f(y) = 4$ för alla $0 < y < b$,

Villkor 3: $u(x, 0) = 0$ för $0 < x < L$, Villkor 4: $u(x, b) = 0$ för $0 < x < L$,

Lösning:

Steg 1

På samma sätt som i Uppgift 1 får vi produktlösningar $u(x, y) = X(x)Y(y)$ till (ekv1):

I) $u(x, y) = (Ax + B)(Cy + D)$ (om $\lambda = 0$)

II) $u(x, y) = (A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x))(C \cos(\alpha y) + D \sin(\alpha y))$, där $\alpha > 0$

III) $u(x, y) = (A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x))(C \cosh(\alpha y) + D \sinh(\alpha y))$, där $\alpha > 0$ (just nu är α vilket som helst positivt tal).

Steg 2. Vi ska visa att endast typ II lösningar uppfyller V3 och V4.

Vi anpassar homogena villkor V3: och V4: till produkt lösningar $u(x, y) = X(x)Y(y)$:

$$u(x, 0) = 0 \text{ för } 0 < x < L \text{ d.v.s. } X(x)Y(0) = 0 \text{ för } 0 < x < L \text{ ger } Y(0) = 0.$$

På liknande sätt $u(x, b) = 0$ för $0 < x < L$ ger $Y(b) = 0$.

Detta tillämpas på produktlösningar i ovanstående tre fall I, II och III:

$$I) u(x, y) = (Ax + B)(Cy + D)$$

Om vi använder $Y(0) = 0$ och $Y(b) = 0$ på lösningar i I där $Y = (Cy + D)$ får vi $C=0$ och $D=0$ d.v.s. $Y=0$ och därmed blir $u(x, y) = X(x)Y(y) \equiv 0$ som vi förkastar.

$$II) u(x, y) = (A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x))(C \cos(\alpha y) + D \sin(\alpha y)), \text{ där } \alpha > 0$$

Här är $Y = C \cos(\alpha y) + D \sin(\alpha y)$.

$$Y(0) = 0 \text{ ger } C \cos(0) + D \sin(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \text{ och därför } Y = D \sin(\alpha y).$$

$$\text{Från } Y(b) = 0 \text{ har vi } D \sin(\alpha b) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{b}.$$

$$\text{Alltså } Y = D \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right).$$

Motsvarande produktlösningar i fall II har formen

$$\left(A \cosh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) + B \sinh\left(\frac{n\pi}{b} x\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right).$$

Men, villkor V1 (som kan skrivas som $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) - u(0, y) = 0$) är också homogen med avseende på $u(x, y)$ och dess derivator.

Vi tillämpar V1 för att ännu mer förenkla produktlösningar.

$$\text{Från } \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = u(0, y), \text{ för } 0 < y < b \text{ har vi } X'(0)Y(y) = X(0)Y(y) \text{ eller}$$

$[X'(0) - X(0)]Y(y) = 0$ som ger $X'(0) = X(0)$ (eftersom $Y(y) = 0$ ger den triviala lösningen).

$$\text{Alltså V1 ger } X'(0) = X(0).$$

$$\text{Från } X = A \cosh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) + B \sinh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \text{ har vi}$$

$$X' = A \frac{n\pi}{b} \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + B \frac{n\pi}{b} \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right).$$

$$\text{Därför } X'(0) = X(0) \Rightarrow A = B \frac{n\pi}{b}.$$

$$\text{Alltså } X = B \frac{n\pi}{b} \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + B \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

Produkt lösningar

$$u = XY = B \left[\frac{n\pi}{b} \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \text{ eller}$$

$$u_n(x, y) = c_n \left[\frac{n\pi}{b} \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

uppfyller ekv1 och homogena villkor V1, V3 och V4.

III) Det är enkelt att typ III lösningar, tillsammans med villkor 3 och 4, ger endast triviala lösningen den här gången. (Kontrollera själv)

Steg 3:

Vi ska undersöka om vi kan bilda en oändlig serie (med obestämda koefficienter c_n)

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\frac{n\pi}{b} \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (\text{ekv 2})$$

så att serien uppfyller villkor 2.

Substitutionen av serien i villkoret

$$u(b, y) = f(y) = 4 \quad \text{ger}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\frac{n\pi}{b} \cosh\left(\frac{n\pi}{b}L\right) + \sinh\left(\frac{n\pi}{b}L\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = f(y)$$

Från (ekv2) ser vi att $c_n \left[\frac{n\pi}{b} \cosh\left(\frac{n\pi}{b}L\right) + \sinh\left(\frac{n\pi}{b}L\right) \right]$ är Fourierkoefficienter vid utveckling

av $f(y)$ (i vårt fall $f(y) = 4$) sinusserie på intervallet $[0, b]$. (Notera att $\Omega = \frac{\pi}{b}$ och

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}} = 2b).$$

$$\text{Alltså } c_n \left[\frac{n\pi}{b} \cosh\left(\frac{n\pi}{b}L\right) + \sinh\left(\frac{n\pi}{b}L\right) \right] = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(y) \sin(n\Omega y) dx = (\text{i vårt fall } f(y) = 4) =$$

$$= \frac{4}{2b} \int_0^b 4 \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy = \frac{2}{b} \int_0^b 4 \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy =$$

$$= \left[\frac{8}{b} \cdot \frac{-b}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right]_0^b = \frac{-8((-1)^n - 1)}{n\pi} = \frac{8(1 - (-1)^n)}{n\pi}.$$

$$\text{Alltså: } c_n \left[\frac{n\pi}{b} \cosh\left(\frac{n\pi}{b}L\right) + \sinh\left(\frac{n\pi}{b}L\right) \right] = \frac{10(1 - (-1)^n)}{n\pi}.$$

$$\text{Härav } c_n = \frac{10(1 - (-1)^n)}{n\pi \left[\frac{n\pi}{b} \cosh\left(\frac{n\pi}{b}L\right) + \sinh\left(\frac{n\pi}{b}L\right) \right]}$$

substitutionen i ekv 2 ger svaret:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10(1 - (-1)^n)}{n\pi \left[\frac{n\pi}{b} \cosh\left(\frac{n\pi}{b}L\right) + \sinh\left(\frac{n\pi}{b}L\right) \right]} \left[\frac{n\pi}{b} \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$