Lösningar till Tentamen, SG1109, 1/6, 2017

1. Ur figuren får vi

$$\mathbf{r}_{AB} = (-3,-3,4)a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{AB} = \frac{(-3,-3,4)}{\sqrt{32}}\,, \tag{1}$$

$$\mathbf{r}_{OB} = (-3,3,4)a\,, \tag{2}$$

$$\mathbf{r}_{OG} = (0,3/2,2)a\,, \tag{3}$$

$$\mathbf{R} = R\mathbf{e}_{AB}\,. \tag{4}$$

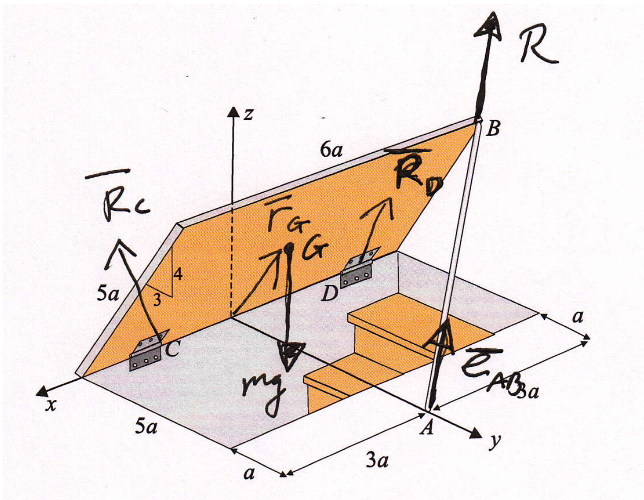
Momentjämvikt m a p origo ger

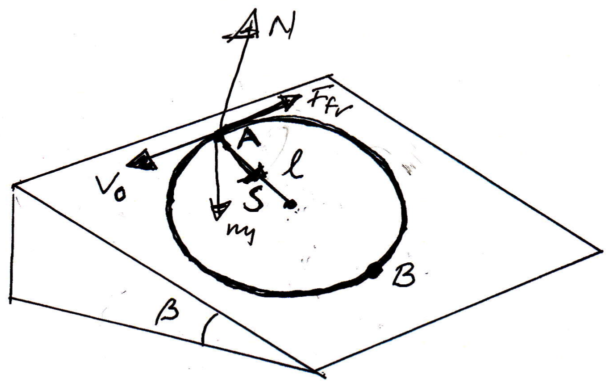
$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{R} + \mathbf{r}_{OG} \times (-mg\mathbf{e}_z) + \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{R}_C + \mathbf{r}_{OD} \times \mathbf{R}_D = \mathbf{0} \tag{5}$$

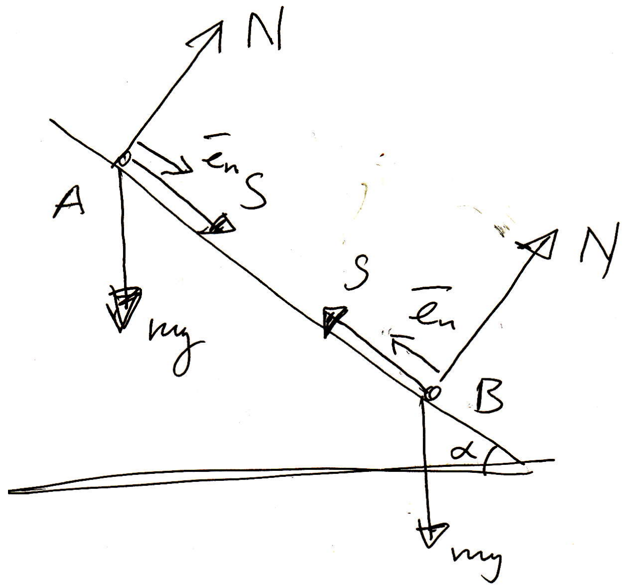
Reaktionskrafterna i C och D bidrar inte till momentet m a p x-axeln. Projektion på x-axeln ger

$$M_x = \mathbf{e}_x \cdot \left((3\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z)aR \times \left(-\frac{3}{\sqrt{32}}\mathbf{e}_y + \frac{4}{\sqrt{32}}\mathbf{e}_z \right) - \frac{3}{2}a\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z \right) = 0 \tag{6}$$

$$\Rightarrow \frac{24R}{\sqrt{32}} - \frac{3}{2}mg \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\sqrt{32}}{16}mg \tag{7}$$







a) Vi antar att friktionskraftens normalkomponent (i riktningen $\mathbf{e}_n$) är noll och att krafterna är riktade enligt figur 1. Enligt figur 2 ger kraftjämvikt i riktningen normalt mot planet:

$$N = \cos\beta mg\,. \tag{8}$$

och friktionkraften är således

$$F_{fr} = \mu\cos\beta mg\,. \tag{9}$$

Den kinesiska energin är lika stor i B som i A. Lagen om den kinesiska energin ger därför

$$0 = U^{fr}_{A-B} + U^{g}_{A-B}\,, \tag{10}$$

där

$$U^{fr}_{A-B} = -\pi l F r = -\pi l \mu \cos\beta mg \tag{11}$$

är friktionskraftens arbete och

$$U^{g}_{A-B} = 2l \sin\beta mg \tag{12}$$

är tyngdkraftens arbete. Alltså fås

$$-\pi l \mu \cos\beta mg + 2L \sin\beta mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{2\tan\beta}{\pi} \tag{13}$$

b) Om vi tillämpar Newtons andra lag i $\mathbf{e}_n$-led får vi (se figur 2)

$$m\frac{v_o^2}{l} = S_A + mg\sin\beta \quad \Rightarrow \quad S_A = m\frac{v_o^2}{l} - mg\sin\beta\,, \tag{14}$$

$$m\frac{v_o^2}{l} = S_B - mg\sin\beta \quad \Rightarrow \quad S_B = m\frac{v_o^2}{l} + mg\sin\beta \tag{15}$$

3. Med x-axeln riktad nedåt som i figuren fås

$$m\ddot{x} = -kx + mg \quad \Rightarrow \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_n^2 x = g\,, \tag{16}$$

där $\omega_n = \sqrt{k/m}$. Ekvation (16) har lösningen

$$x = A\sin(\omega_n t) + B\cos(\omega_n t) + \frac{mg}{k}\,. \tag{17}$$

Begynnelsevillkoren är

$$x(0) = \delta\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,, \tag{18}$$

vilket ger

$$\delta = B + \frac{mg}{k} \quad \Rightarrow \quad B = \delta - \frac{mg}{k} \tag{19}$$

$$0 = A\,, \tag{20}$$

och lösningen

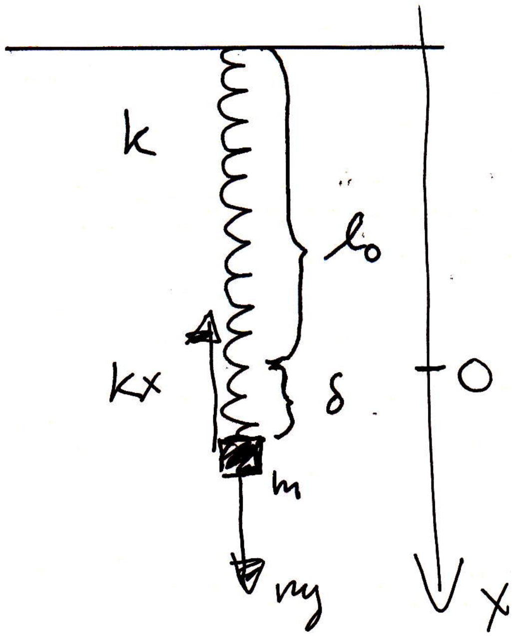
$$x(t) = (\delta - \frac{mg}{k})\cos(\omega_n t) + \frac{mg}{k}\,. \tag{21}$$

Partikelns hastighet blir således

$$\dot{x}(t) = -\omega_n(\delta - \frac{mg}{k})\sin(\omega_n t)\,. \tag{22}$$

Efter en fjärdedels period är $t = \tau_n/4 = \pi/(2\omega_n)$. Då är partikelns hastighet

$$\dot{x} = -\omega_n(\delta - \frac{mg}{k})\sin(\pi/2) = -\sqrt{\frac{k}{m}}\,\delta + \sqrt{\frac{m}{k}}g \tag{23}$$



4.

a) Rörelsemängdsmomentets bevarande ger

$$v_A r_A = v_0 R\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad v_A = \frac{R\cos\alpha}{r_A} v_0\,. \tag{24}$$

Energins bevarande ger

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{mgR^2}{R} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{mgR^2}{r_A} \Rightarrow \tag{25}$$

$$\frac{1}{2}gR - gR = \frac{gR^3\cos^2\alpha}{2r_A^2} - \frac{gR^2}{r_A} \quad\Rightarrow\quad r_A^2 - 2Rr_A + \cos^2\alpha R^2 = 0\,, \tag{26}$$

där vi utnyttjat att $v_0^2 = gR$. Andragradsekvationen har lösningen

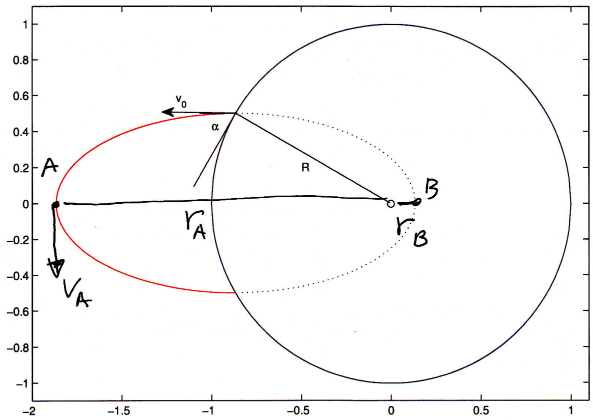
$$r_A = R \pm \sqrt{R^2 - R^2\cos^2\alpha} = R(1 \pm \sin\alpha)\,. \tag{27}$$

Eftersom $r_A > R$ måste vi välja lösningen

$$r_A = (1+\sin\alpha)R\,. \tag{28}$$

Antag att all jordens massa hade varit koncentrerad i en punkt. Då hade missilen fullbordat ett helt varv och samma villkor hade gällt för punkten B som för punkten A. Alltså ger den andra lösningen av andragradsekvationen avståndet till punkt B:

$$r_B = (1-\sin\alpha)R\,. \tag{29}$$



b) Närmaste avstånd fås då $\theta = 0$ och avståndet längst bort fås då $\theta = \pi$ i ekvationen

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta)}\,. \tag{30}$$

Detta ger

$$R(1-\sin\alpha) = a(1-e) \tag{31}$$
$$R((1+\sin\alpha = a(1+e)\,. \tag{32}$$

Detta ger

$$a = R \tag{33}$$
$$e = \sin\alpha \tag{34}$$