

SK1112 Övningsuppgifter

Övning 1 uppgifter 1.1

Startpistol - F 2008-08-18

A1

$$\beta = 64 \text{ dB vid } r = 100 \text{ m}$$

University Physics (Y&F) 14th Global Edition

Index $\rightarrow$ Decibel scale $\rightarrow$ p.540

$$(1) \quad \beta = \underbrace{(10 \text{ dB})}_{\beta_0} \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad , \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

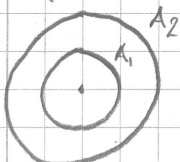
reference intensity

Table 16.2:	$I \text{ (W/m}^2\text{)}$	$\beta \text{ (dB)}$	(approx. human threshold at 1000 Hz)
Gränsvärde hörsel	10^{-12}	0	
Prasslande löv	10^{-11}	10	
Viskning	10^{-10}	20	
Vanlig konversation	$3.2 \cdot 10^{-6}$	65	
Gränsvärde smärta	1	120	

skriv (1) uppe i exponenten (bas 10):

$$10^{\beta/\beta_0} = \frac{I}{I_0} \Rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\beta/\beta_0} = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{\frac{64 \text{ dB}}{10 \text{ dB}}} = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2 \quad \text{vid } r = 100 \text{ m}$$

om inte specificerat eller annat anlytt, anta vågen sprider sig jämnt i alla riktningar (sfärisk våg)



$$\text{Akustisk effekt } P = I \cdot A \quad (2)$$

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi (100 \text{ m})^2 = 1.26 \cdot 10^5 \text{ m}^2$$

reflektion av ljud
mot marken
försummas

$$\Rightarrow P = 2.5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 1.26 \cdot 10^5 \text{ m}^2 = \underline{\underline{0.32 \text{ W}}}$$

Kameraklick - IMT 2002-01-09

- 5] Klickljud med $\beta = 40 \text{ dB}$ vid $d = 1 \text{ m}$ från cirkulärt membran med radie $r_m = 1 \text{ mm}$
Sökt: membranets maxhastighet $v_{\max}$

Anta: sinusformad (harmonisk) rörelse av membranet
F2 $\rightarrow$ partikelhastighet $\rightarrow$ harmonisk förskjutning $s(x,t)$

$$(1) \quad s = s_0 \sin(kx - \omega t + \delta)$$

partikelhastigheten (alltså membranets hastighet)
fås genom tidsderivatan av s

$$(2) \quad v = \frac{\partial s}{\partial t} = \underbrace{-s_0 \omega}_{\text{amplitud } v_{\max}} \cos(kx - \omega t + \delta) = -v_{\max} \cos(kx - \omega t + \delta)$$

$$(3) \quad \Rightarrow \boxed{v_{\max} = s_0 \omega}$$

Vi har β som är relaterat till intensitet, hur relaterar vi $s_0 \omega$ till intensitet?

F2 $\rightarrow$ intensitet eller p. 538 i Y&F

$$(4) \quad I = \frac{s_0^2 \omega^2 \rho c}{2} = \left\{ \begin{array}{l} v_{\max} = s_0 \omega \\ Z_0 = \rho c \end{array} \right\} = \frac{v_{\max}^2 Z_0}{2}$$

Z_0 - akustisk impedans, $430 \text{ kg/m}^2\text{s}$ i luft F2, (1.2), eller ex 16.5

$$(5) \quad (4) \rightarrow \boxed{v_{\max} = \sqrt{\frac{2I_m}{Z_0}}}$$

I_m - intensiteten vid membranet

Kvar: relatera β till I_m , vilket vi kan göra genom effekten som är konstant

$$(6) \quad P = I_d A_d = I_m A_m$$

Anta: ingen absorption ($e^{-\alpha r}$, $\alpha = 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ i torr luft)
 $e^{-\alpha r} = 0.9999$ i torr luft vid $r = 1 \text{ m}$

F2 $\rightarrow$ ljudintensitetsnivå eller p. 540: Y&F

$$\beta = (10 \text{ dB})^{10} \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

referensintensitet

vid $d = 1 \text{ m}$ (se förra uppgiften):

$$(7) \Rightarrow I_d = I_0 10^{\beta / (10 \text{ dB})} = I_0 10^4 = 10^{-8} \text{ W/m}^2$$

$$(6) \Rightarrow P = I_d \underbrace{A_d}_{4\pi d^2} = I_d \cdot 4\pi d^2 = 1.26 \cdot 10^{-7} \text{ W}$$

$$(6) \Rightarrow I_m = \frac{P}{\underbrace{A_m}_{\pi r_m^2}} = \frac{P}{\pi r_m^2} = 0.04 \text{ W/m}^2$$

$$(5) \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.04 \text{ W/m}^2}{430 \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}}} = 0.014 \text{ m/s}$$

$$\text{Dimensionskontroll: } \left[\frac{\text{W/m}^2}{\text{kg/m}^2 \cdot \text{s}} \right] = \left[\frac{\text{J/m}^2 \cdot \text{s}}{\text{kg/m}^2 \cdot \text{s}} \right] =$$

$$= \left\{ E [\text{J}] = \frac{1}{2} m v^2 \left[\text{kg} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right] \right\} = \left[\frac{\text{kg/m}^2 \cdot \text{s} \cdot \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{\text{kg/m}^2 \cdot \text{s}} \right] =$$

$$= \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad \text{OK}$$

Varför tar vi bara hänsyn till ena sidan av membranet?

Andra sidan är instängd i kameran och kommer inte bidra avsevärt till klickljudet utan för kameran (inner väggarna i kamerahöljet reflekterar eller absorberar ljudet)

Snödämpning - I 2003-01-13

3 Uttryck för ljudintensitetens avståndsberoende vid snöfall (absorption)

(1)
$$I = \frac{P}{4\pi r^2} e^{-ar} \quad , \quad a = 0.12 \text{ m}^{-1} \text{ dämpningskoefficient}$$

Vanliga regeln att ljudet minskar med 6 dB (faktor $M=4$) då man dubblar avståndet gäller inte vid absorption.

Sökt: Ljudminskning från 10 m till 20 m och från 20 m till 40 m

Relatera β_1 vid $r_1=10\text{ m}$, β_2 vid $r_2=20\text{ m}$, β_3 vid $r_3=40\text{ m}$ till varandra så att $\beta_1 - \beta_2$ och $\beta_2 - \beta_3$ är den sökta ljudminskningen

(2a) Logaritmlagar: $\log(a) + \log(b) = \log(a \cdot b)$

(2b) $\log(a) - \log(b) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$

(2c) $n \log(a) = \log(a^n)$

F2 $\rightarrow$ ljudintensitetsnivå eller p. 540 i Y&F

(3)
$$\beta = (10 \text{ dB}) \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad , \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \text{ referensintensitet}$$

$$\beta_1 - \beta_2 = \{(3)\} = (10 \text{ dB}) \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) - (10 \text{ dB}) \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) =$$

$$= \{(2b)\} = (10 \text{ dB}) \log\left(\frac{I_1/I_0}{I_2/I_0}\right) = (10 \text{ dB}) \log\left(\frac{I_1}{I_2}\right) =$$

$$= \{(1)\} = (10 \text{ dB}) \log\left(\frac{P e^{-ar_1}/4\pi r_1^2}{P e^{-ar_2}/4\pi r_2^2}\right) = (10 \text{ dB}) \log\left(\frac{r_2^2 e^{-a(r_1-r_2)}}{r_1^2}\right) =$$

Högtalar kraft - BOMTI 2010-06-03

B2 Högtalare med $\beta = 65 \text{ dB}$ vid $d = 2 \text{ m}$ och membranarea $A_m = 10 \text{ cm}^2 = 10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 10^{-3} \text{ m}^2$

Sökt: F_{max} som membranet utövar på luften, anta att hela membranet rör sig lika mycket

Hur får vi kraften? A) Från tryck och area:

(1) $F_{\text{max}} = p_{\text{max}} \cdot A_m$

B) Från effekt och hastighet:

(2) $P = \langle Fv \rangle_t = \frac{F_{\text{max}} \cdot v_{\text{max}}}{2} \Rightarrow F_{\text{max}} = 2P/v_{\text{max}}$

A) Hur kan vi räkna ut p_{max} ?

kap. 16.3 "Sound Intensity" $\rightarrow$ p. 538 i Y&F:

(3) $I_m = \frac{p_{\text{max}}^2}{2Z_0} = \frac{p_{\text{max}}^2}{2Z_0}$, Z_0 - akustisk impedans $430 \text{ kg/m}^2\text{s}$ i luft

(4) $\Rightarrow p_{\text{max}} = \sqrt{2Z_0 I_m}$

Räkna ut I_m från β och d :

p. 540 i Y&F $\beta = (10 \text{ dB}) \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, I_0 - referens-intensitet

(5) $\Rightarrow I_d = I_0 10^{\beta/(10 \text{ dB})} = 10^{-5.5} \text{ W/m}^2$ $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

Eftersom effekten $P = I \cdot A$ är konstant, så är:

(6) $I_d A_d = I_m A_m \Rightarrow I_m = I_d \frac{A_d}{A_m}$

Anta: fristående högtalare som sprider ljudet lika åt alla håll (sfärisk våg)

(7) $A_d = 4\pi d^2 = 16\pi \text{ m}^2$

$$\left\{ \begin{matrix} (2a) \\ (2c) \end{matrix} \right\} = (10 \text{ dB}) \left[\underbrace{2 \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}_{0.3 \text{ för } \frac{r_2}{r_1} = 2} - a(r_1 - r_2) \underbrace{\log(e)}_{\approx 0.4343} \right]$$

sätt $r_2 = 2r_1$:

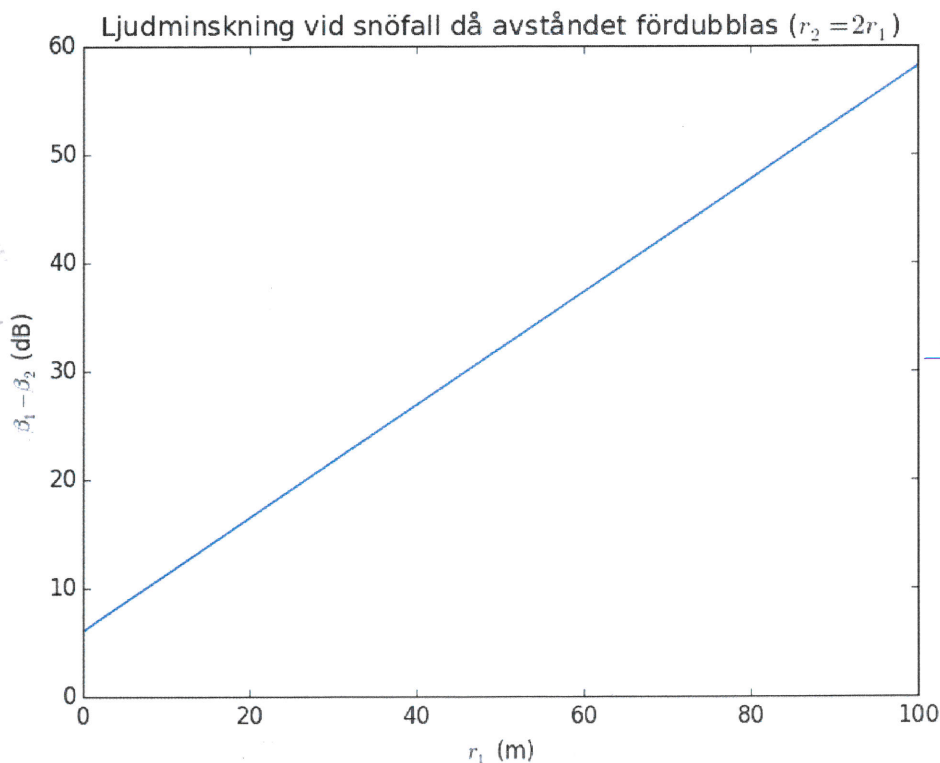
$$\Rightarrow \beta_1 - \beta_2 = (10 \text{ dB}) [2 \log(2) + a r_1 \log(e)]$$

$\therefore$ linjärt beroende på r_1 (eller r_2) med lutning $(10 \text{ dB}) a \log(e)$ och skärningspunktsvärde

$$(10 \text{ dB}) 2 \log(2) = 6 \text{ dB}$$

$$r_1 = 10 \text{ m} \Rightarrow \beta_1 - \beta_2 = 11.2 \text{ dB}$$

$$r_1 = 20 \text{ m} \Rightarrow \beta_1 - \beta_2 = \underline{\underline{16.4 \text{ dB}}}$$



$$\Rightarrow I_m = 10^{-5.5} \text{ W/m}^2 \cdot \frac{16\pi \text{ m}^2}{10 \text{ cm}^2} = 10^{-1.5} \text{ W/m}^2 \cdot \frac{16\pi}{10} =$$

$$\underbrace{1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}}_{10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}$$

$$= 0.159 \text{ W/m}^2$$

$$(4) \Rightarrow P_{\max} = \sqrt{2.430 \text{ kg/m}^3 \cdot 0.159 \text{ W/m}^2} =$$

$$= \sqrt{136.7 \frac{\text{kg}^2}{\text{m}^2 \text{ s}^4}} = 11.7 \text{ Pa} \quad [\text{kg/m s}^2]$$

$$(1) \Rightarrow F_{\max} = P_{\max} \cdot A_m = 11.7 \text{ Pa} \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 12 \text{ mN}$$

$$[\text{kg m/s}^2]$$

B) Hur kan vi räkna ut max hastigheten?
partikel

F2 → partikel hastighet + F2 → intensitet eller p. 538 i Y&F

$$(8) \quad v = \frac{\partial s}{\partial t} = \underbrace{-s_0 \omega \cos(kx - \omega t + \delta)}_{v_{\max}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{\max} = s_0 \omega}$$

$$(9) \quad I_m = \frac{s_0^2 \omega^2 \rho c}{2} = \left\{ \begin{array}{l} v_{\max} = s_0 \omega \\ Z_0 = \rho c \end{array} \right\} = \frac{v_{\max}^2 Z_0}{2}$$

$$\Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2 I_m}{Z_0}} = 0.0272 \text{ m/s}$$

$$\left[\frac{\text{W/m}^2}{\sqrt{\text{kg/m}^2 \text{ s}}} = \sqrt{\frac{\text{kg m}^2}{\text{kg s}^2}} = \sqrt{\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}} \quad (\text{E} = \frac{1}{2} m v^2)$$

$$(2) \Rightarrow F_{\max} = \frac{2P}{v_{\max}} = \left\{ P = I_m A_m \right\} = \left[\sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \text{ OK}$$

$$= \frac{2 I_m A_m}{v_{\max}} = \frac{2 \cdot 0.159 \text{ W/m}^2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2}{0.027 \text{ m/s}} = 0.0012 \text{ N} = \underline{\underline{12 \text{ mN}}}$$

Dimensionskoll: $\left[\frac{\text{W/m}^2 \cdot \text{m}^2}{\text{m/s}} = \frac{\text{kg m}^2/\text{s}^3}{\text{m/s}} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \text{N} \right] \text{ OK}$

Övning 1 extrauppgifter 1.2

Ohyra - MBS DTI 2010-05-29

A4 Mellan 2 plattor alstras en stående ultraljudsvåg med $f = 120 \text{ kHz}$ och $v_{\text{max}} = 1.2 \text{ m/s}$

Sökt: Förstärkningsamplitud s_0

F2 $\rightarrow$ partikel hastighet eller p. 538 ; Y&F

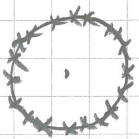
$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = \underbrace{-s_0 \omega}_{v_{\text{max}}} \cos(kx - \omega t)$$

$$v_{\text{max}} = s_0 \omega = s_0 \underbrace{2\pi f}$$

$$\Rightarrow s_0 = \frac{v_{\text{m}}}{2\pi f} = \frac{1.2 \text{ m/s}}{2\pi \cdot 120\,000 \text{ s}^{-1}} = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ m} = \underline{\underline{1.6 \mu\text{m}}}$$

Maskinring - F 2009-05-18

A3 20 identiska maskiner i en ring bullrar tillsammans $\beta = 78.6 \text{ dB}$ i mitten av ringen



Sökt: β från 19 maskiner

Anta: Bullret är inkoherent (ingen interferens)

$$\text{så att } I_{\text{tot},20} = \sum_{j=1}^{20} I_j$$

Identiska maskiner $\therefore I_1 = I_2 = \dots = I_{20} = I_{\text{tot},20} / 20$

(1) p. 540 ; Y&F $\beta = (10 \text{ dB}) \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, I_0 - referensintensitet

$$\Rightarrow I_{\text{tot},20} = I_0 \cdot 10^{\beta_{\text{tot},20}/(10 \text{ dB})} = 7.244 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2 \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

$$I_{\text{tot},19} = I_{\text{tot},20} - I_{\text{tot},20} / 20 = 6.882 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

$$(1) \Rightarrow \beta_{\text{tot},19} = (10 \text{ dB}) \log \left(\frac{6.882 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} \right) =$$

$$= \underline{\underline{78.4 \text{ dB}}}$$

Alternativt: Förändringsfaktorn i intensitet är

$$M = \frac{19}{20} \Rightarrow \beta_{\text{tot},19} = \underbrace{\beta_{\text{tot},20}}_{78.6 \text{ dB}} + \underbrace{\log(M) \cdot (10 \text{ dB})}_{-0.0223} = \underline{\underline{78.4 \text{ dB}}}$$

Summer - I 2000-01-11

[3] Summer med $\beta_1 = 54 \text{ dB}$ vid $f_1 = 600 \text{ Hz}$, $A_{m,1}$, $S_{0,1}$

Sökt: β_2 vid $f_2 = 900 \text{ Hz}$, $A_{m,2} = 2A_{m,1}$, $S_{0,2} = 1.5 S_{0,1}$

F2 $\rightarrow$ ljudintensitetsnivå:

$$(1) \quad \beta_2 - \beta_1 = (10 \text{ dB}) \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$$

$$(2) \Rightarrow \beta_2 = \beta_1 + (10 \text{ dB}) \log \left(\underbrace{\frac{I_2}{I_1}}_M \right), \text{ där } I_a = \frac{P}{A_d} = \frac{P}{4\pi d^2}$$

konstant!

F2 $\rightarrow$ intensitet:

$$(3) \quad I_m = \frac{S_0^2 \omega^2 \rho c}{2} = \{ \omega = 2\pi f \} = 2\pi^2 S_0^2 f^2 \rho c, \text{ där } I_m = \frac{P}{A_m}$$

ändras!

$$\Rightarrow M = \frac{I_2}{I_1} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{I_{m,2} A_2}{I_{m,1} A_1} = \left\{ (3) \right\} = \frac{2\pi^2 S_{0,2}^2 f_2^2 \rho c A_2}{2\pi^2 S_{0,1}^2 f_1^2 \rho c A_1} = \frac{S_{0,2}^2 f_2^2}{S_{0,1}^2 f_1^2} \frac{A_2}{A_1} =$$

$$= \frac{2A_1}{A_1} \frac{1.5^2 S_{0,1}^2 (900 \text{ Hz})^2}{S_{0,1}^2 (600 \text{ Hz})^2} = 2 \cdot 2.25 \cdot 2.25 = 10.054$$

$$\Rightarrow \beta_2 = 54 \text{ dB} + (10 \text{ dB}) \cdot \log(10.054) = \underline{\underline{64 \text{ dB}}}$$

Ekolod - I 2002-03-05

3] Ljudsändare med fix amplitud och frekvens
 $I_d = 50 \mu\text{W}/\text{m}^2$ vid $d = 1 \text{ m}$ i luft

Sökt: I_d vid $d = 1 \text{ m}$ i vatten

F2 $\rightarrow$ intensitet eller p. 538 i Y&F:

$$(1) I_m = \frac{S_0^2 \omega^2 \rho c}{2} = \frac{S_0^2 \omega^2 Z_0}{2}, \quad Z_0 - \text{akustisk impedans}$$

$Z_0 \approx 430 \text{ kg/m}^2\text{s}$ i luft

Anta: $T = 20^\circ\text{C}$ wikipedia $\rightarrow$ ljudhastighet och densitet

	$c \text{ (m/s)}$	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$Z_0 \text{ (kg/m}^2\text{s)}$
luft	343,4	1,204	413,5
söt vatten	1480	998,2	$1477 \cdot 10^3$
havsvatten	1520	1010-1030	$\sim 1550 \cdot 10^3$

Anta: havsvatten

$$M = \frac{I_{d,\text{vatten}}}{I_{d,\text{luft}}} = \left\{ \begin{array}{l} A_d = \text{konstant} \\ P = I_d A_d \end{array} \right\} = \frac{P_{\text{vatten}}}{P_{\text{luft}}} = \left\{ \begin{array}{l} P = I_m \cdot A_m \\ A_m = \text{konstant} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{I_{m,\text{vatten}}}{I_{m,\text{luft}}} = \left\{ (1) \right\} = \frac{S_0^2 \omega^2 Z_{0,\text{vatten}} / 2}{S_0^2 \omega^2 Z_{0,\text{luft}} / 2} = \frac{1550 \cdot 10^3}{413,5}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
fix fix

$$= 3749$$

$$\Rightarrow I_{d,\text{vatten}} = M \cdot I_{d,\text{luft}} = \underline{\underline{0.19 \text{ W/m}^2}} \quad \begin{array}{l} 0.15 \text{ W/m}^2 \\ \text{i facit} \end{array}$$

Om inga tabellerade värden?

Kolla exempel i boken! p. 539 i Y&F, Ex. 16.5:

$c_{\text{luft}} = 344 \text{ m/s}$, $\rho_{\text{luft}} = 1,20 \text{ kg/m}^3$, p. 536; Ex. 16.3:

$c_{\text{vatten}} = 1480 \text{ m/s}$, $\rho_{\text{vatten}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \Rightarrow 0.18 \text{ W/m}^2$

$\text{med } Z_{0,\text{luft}} = 430$
och $Z_{0,\text{vatten}} = 1.3 \cdot 10^6$
 $1 \text{ kg/m}^2\text{s}$

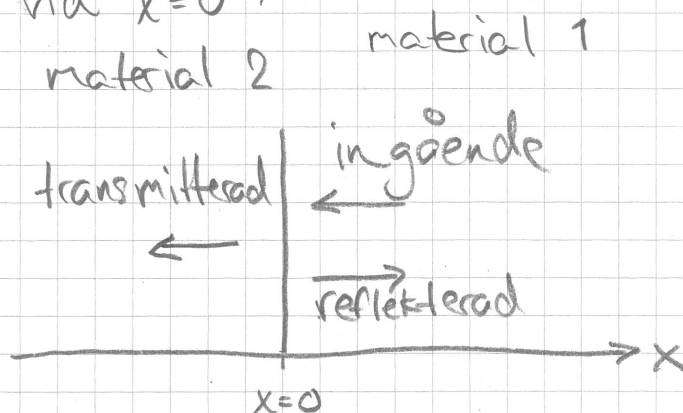
Reflektans - FCL 2008-05-19

B3

Förstjutning och tryck skall vara kontinuerliga över gränssyta så att vid $x=0$:

(1) $S_i + S_r = S_t$, $\forall t$

(2) $P_i + P_r = P_t$



Visa att reflektansen $R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$, $Z_i = \rho_i c_i$

Anta: ingående våg vinkelrät mot gränssyta

Sökt: $R = \frac{I_r}{I_i}$ ekv. (1.4) i formelsamling

Sätt upp uttryck för förstjutning:

(3) $S_i(x,t) = S_{i,0} \sin(k_1 x + \omega_1 t + \delta_1)$

↑
rör sig i -x-riktning

(4) $S_r(x,t) = S_{r,0} \sin(k_1 x - \omega_1 t + \delta_1)$

(5) $S_t(x,t) = S_{t,0} \sin(k_2 x + \omega_2 t + \delta_2)$

Sätt upp uttryck för tryck:
F2 → ljudtryck

(6) $p_i(x,t) = \rho_1 \frac{\partial S_i}{\partial x} = -\rho_1 S_{i,0} k_1 \cos(k_1 x + \omega_1 t + \delta_1)$

(7) $p_r(x,t) = -\rho_1 \frac{\partial S_r}{\partial x} = -\rho_1 S_{r,0} k_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t + \delta_1)$

(8) $p_t(x,t) = -\rho_2 \frac{\partial S_t}{\partial x} = -\rho_2 S_{t,0} k_2 \cos(k_2 x + \omega_2 t + \delta_2)$

Sätt upp uttryck för I_r och I_i :
 $FZ \rightarrow$ intensitet

$$(9) \quad I_r = \frac{S_{r,0}^2 \omega_1^2 \rho_1 c_1}{2}$$

$$(10) \quad I_i = \frac{S_{i,0}^2 \omega_1^2 \rho_1 c_1}{2}$$

$$(11) \Rightarrow R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{S_{r,0}^2 \omega_1^2 \rho_1 c_1 / 2}{S_{i,0}^2 \omega_1^2 \rho_1 c_1 / 2} = \frac{S_{r,0}^2}{S_{i,0}^2} = \left(\frac{S_{r,0}}{S_{i,0}} \right)^2$$

Anta: $\delta_1 = \delta_2 = 0$

(1) och (2) skall vara uppfyllda vid $x=0$ för alla t $\Rightarrow$ krav på likheter för både argument och amplitud

(3-5) : (1) vid $x=0$:

$$S_{i,0} \sin(\omega_1 t) + S_{r,0} \sin(-\omega_1 t) = S_{t,0} \sin(\omega_2 t) , \quad \forall t$$

$\leftarrow \sin(-x) = -\sin(x)$

$$(S_{i,0} - S_{r,0}) \sin(\omega_1 t) = S_{t,0} \sin(\omega_2 t) , \quad \forall t$$

$$(12) \Rightarrow S_{i,0} - S_{r,0} = S_{t,0} , \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega$$

(6-8) : (2) vid $x=0$:

$$-B_1 S_{i,0} k_1 \cos(\omega t) - B_1 S_{r,0} k_1 \cos(-\omega t) = -B_2 S_{t,0} k_2 \cos(\omega t)$$

$\underbrace{\cos(-x) = \cos(x)}$

$$B_1 k_1 (S_{i,0} + S_{r,0}) \cos(\omega t) = B_2 k_2 S_{t,0} \cos(\omega t) , \quad \forall t$$

$$(13) \Rightarrow B_1 k_1 (S_{i,0} + S_{r,0}) = B_2 k_2 S_{t,0}$$

Använd relationer för att omvandla B och k (p. 538; Y&F):

$$\omega = ck , \quad c = \sqrt{B/\rho} \Rightarrow B = c^2 \rho , \quad Z_0 = c\rho$$

$$(14) \Rightarrow \beta_1 k_1 = C_1^2 \rho_1 \cdot \frac{\omega}{C_1} = C_1 \rho_1 \omega = Z_{0,1} \omega$$

$$(15) \quad \beta_2 k_2 = C_2^2 \rho_2 \cdot \frac{\omega}{C_2} = C_2 \rho_2 \omega = Z_{0,2} \omega$$

(12), (14) och (15) i (13) :

$$Z_{0,1} \omega (S_{i,0} + S_{r,0}) = Z_{0,2} \omega S_{t,0} = Z_{0,2} \omega (S_{i,0} - S_{r,0})$$

flytta över och ordna $S_{i,0}$ och $S_{r,0}$ termer:

$$S_{r,0} (Z_{0,1} \cancel{\omega} + Z_{0,2} \cancel{\omega}) = S_{i,0} (Z_{0,2} \cancel{\omega} - Z_{0,1} \cancel{\omega})$$

$$\Rightarrow \frac{S_{r,0}}{S_{i,0}} = - \frac{(Z_{0,1} - Z_{0,2})}{(Z_{0,1} + Z_{0,2})} \quad (16)$$

(16) i (11) :

$$\Rightarrow R = \left(\frac{S_{r,0}}{S_{i,0}} \right)^2 = \left(- \frac{(Z_{0,1} - Z_{0,2})}{(Z_{0,1} + Z_{0,2})} \right)^2 = \{(-1)^2 = 1\} = \left(\frac{Z_{0,1} - Z_{0,2}}{Z_{0,1} + Z_{0,2}} \right)^2$$

QED