

Övning 2 - uppgifter 2.1

Garn fragment - MTI 2001-04-27

2 Garn-trådar med $l = 1 \text{ cm}$, $d = 20 \mu\text{m}$, $\rho = 500 \text{ kg/m}^3$
och $q_{\text{tråd}} = 10^6 e$, $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ elementarladdningen
($q_e = -e$, $q_p = e$)

Sätt: Elektrisk fältstyrka $|\vec{E}| = E$ för elektriskt fält
100 gånger större än gravitationskraften

$$F_g = mg, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2 - \text{tyngdaccelerationen}$$

$$\therefore F_E = 100 F_g \quad F \&Y \rightarrow \text{index} \rightarrow \text{gravitation} \rightarrow \text{p. 74}$$

Räkna ut trådens massa och följelvis gravitationskraften
som verkar på den

$$m = \rho \cdot V = \left\{ \begin{array}{l} V = A d \cdot l \\ A d = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \end{array} \right\} = \rho \cdot \pi \frac{d^2}{4} \cdot l = 500 \text{ kg/m}^3 \cdot \pi \cdot \frac{(20 \cdot 10^{-6} \text{ m})^2}{4} \cdot$$

$$\cdot 10^{-2} \text{ m} = 1.57 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$$

$$\Rightarrow F_g = m \cdot g = 1.57 \cdot 10^{-9} \cdot 9.8 \text{ kg m/s}^2 = 1.54 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

Den elektriska kraften ges av fältstyrka gånger laddning

$$F_E = q_{\text{tråd}} \cdot E \Rightarrow E = \frac{F_E}{q_{\text{tråd}}} = \frac{100 F_g}{10^6 e} = \frac{100 \cdot 1.54 \cdot 10^{-8} \text{ N}}{10^6 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} =$$

$$= 9.6 \cdot 10^6 \text{ N/C} \approx 10^7 \text{ V/m}$$

$$\text{N/C} = \left\{ \begin{array}{l} V = \text{J/C} = \text{Nm/C} \end{array} \right\} = \text{V/m}$$

Jämför med överslagsfältet i luft på $E_B = 2 \text{ MV/m}$,
så denna fältstyrka kan inte upprätthållas i luft.
Går detta? Nej, men kanske en faktor 10 gånger
 F_g

Dipol smuts - I 2001-10-26

1] Givet: Smuts med dipolmoment $p = qd = 10^{-29}$ (m som sitter fast med $F_{\text{smuts}} = 10^{-20}$ N och ska avlägsnas med ett fält $E = 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}} = \frac{\text{N}}{\text{C}}$ från trådladdning ($E \propto 1/r$)

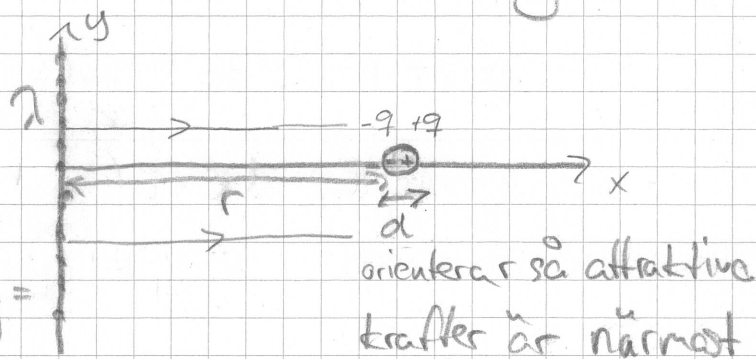
Sökt: Avstånd r från trådladdning för att kunna avlägsna smutsen ($F_E \approx F_{\text{smuts}}$)

F4 → trådladdning eller (2.3); formelsamling:

(1) $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$, λ [C/m] - laddningsfäthet

Kraften på dipolen ges av

$$F = F_- + F_+ = \{F = qE\} =$$



$$= -qE(r) + qE(r+d) = -\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0(r+d)} =$$

$$= \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{r}{r(r+d)} - \frac{(r+d)}{r(r+d)} \right) = \frac{-q\lambda d}{2\pi\epsilon_0 r(r+d)} = \left\{ \begin{array}{l} d \ll r \\ p = qd \end{array} \right\} \approx \frac{-p\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} =$$

$$= \{ (1) \} = \frac{-pE}{r}$$

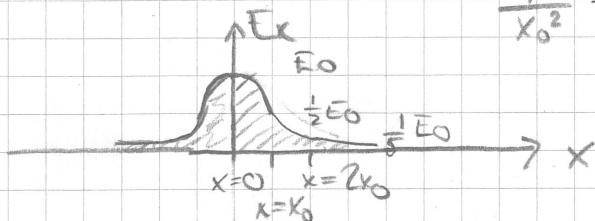
$$E \approx 10^5 \text{ V/m} \text{ och } |F| = \frac{pE}{r} = F_{\text{smuts}} = 10^{-20} \text{ N}$$

$$\Rightarrow r = \frac{pE}{F_{\text{smuts}}} = \frac{10^{-29} \text{ (m)} \cdot 10^5 \text{ N/C}}{10^{-20} \text{ N}} = 10^{-4} \text{ m} = \underline{\underline{0.1 \text{ mm}}}$$

Lysdiod - MT 1999-06-02

2 Givet: statistiskt E-fält för lysdiod

$$E_x(x) = E_0 \frac{1}{\frac{x^2}{x_0^2} + 1}, \quad x_0 = 3.0 \mu\text{m}$$



Sätt: $\max(E_x(x)) = E_0$ (vid $x=0$) om spänningsfallet över x ska vara $U_x = \frac{W_x}{Q} = 1.2 \text{ V}$

Spänning får genom att integrera E_x längs x

$$U_x = \int_{x=-\infty}^{\infty} E_x dx = E_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x/x_0)^2 + 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x}{x_0} \\ dy = \frac{dx}{x_0} \end{array} \right\} = E_0 x_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2 + 1} dy =$$

$$= E_0 x_0 \int_0^{\infty} \frac{2 dy}{y^2 + 1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{BETA: p. 179, } a=2 \\ 7.5.18: \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^a} = \frac{\pi}{a \sin \frac{\pi}{a}} \end{array} \right\} = E_0 x_0 \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{2}} = E_0 x_0 \pi$$

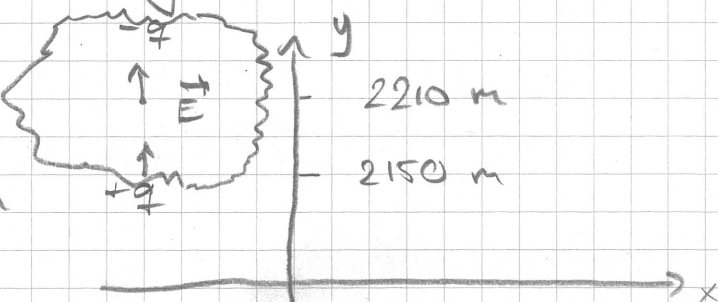
$$\Rightarrow E_0 = \frac{U_x}{\pi x_0} = \frac{1.2 \text{ V}}{\pi \cdot 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 1.27 \cdot 10^5 \text{ V/m}$$

Åskmoln - F 2011-?

Givet: Elektriska fältet på 2 höjder i åskmoln

$$|\vec{E}(y=2150\text{ m})| = 47.1 \text{ kV/m}$$

$$|\vec{E}(y=2210\text{ m})| = 38.4 \text{ kV/m}$$

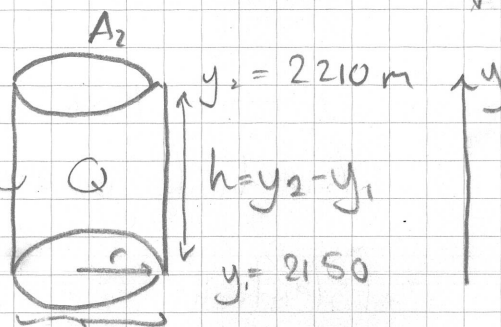


Sökt: Laddnings tätheten ρ i molnet, där $\rho = \frac{Q}{V}$

Definera volymen V :

$$V = 2A_s + A_m$$

$$A_m = 2\pi rh$$



Q kan fås från $\vec{E}$ genom Gauss sats:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Q - laddning inne sluten i S

Anta: $\vec{E}$ vertikalt i hela S och således konstant över A_s . När $\vec{E}$ är vinkelrätt mot ytan är bidraget 0 ($\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$)
 $\Rightarrow$ mantelytan A_m ger inget bidrag

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\oint_{A_m} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{=0} + \oint_{A_s} \vec{E} \cdot d\vec{S} = A_2 E_2 - A_1 E_1 =$$

$$\{A_2 = A_1 = A\} = A(E_2 - E_1) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

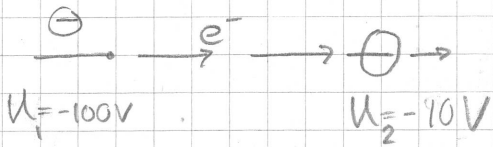
$$\Rightarrow \rho = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A (E_2 - E_1)}{A \cdot (h_2 - h_1)} = \epsilon_0 \frac{(E_2 - E_1)}{y_2 - y_1} = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{N/C}}{\text{V/m}} \cdot \frac{\text{V/m}}{\text{m}} = \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$$

$$(38.4 - 47.1) \cdot 10^3 / (2210 - 2150) = -1.58 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^3$$

2.2 Etrauppgifter - övning 2

Bildrör 1 - MT 1998-05-28

- 1 Givet: elektroner färdas från en negativ elektrod på potentialen -100 V till en ringelektrod med potentialen -10 V . $\Rightarrow$ spänning $V = U_2 - U_1 = 90\text{ V}$



Sökt: hastigheten v_2 vid ringelektroden

Anta: $v_1 = 0$, hela spänningsfallet omvandlas till kinetisk energi $E_v = E_{\text{kin}} = \frac{mv_2^2}{2}$

Potentiell energi från spänningsfallet

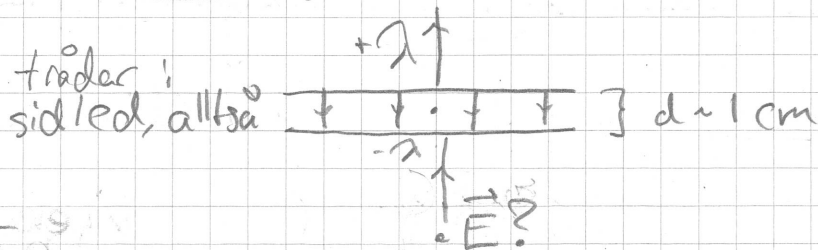
$$E_v = q_e V \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2q_e V}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 90 \text{ V}}{9,1094 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 5,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Dimensionskoll: $\left[\frac{\text{C} \cdot \text{V}}{\text{kg}} \right] = \left\{ \text{C} \cdot \text{V} = \text{J} = \text{m}^2 \text{kg/s}^2 \right\} = \left[\frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^2 \text{kg}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \quad \text{OK}$

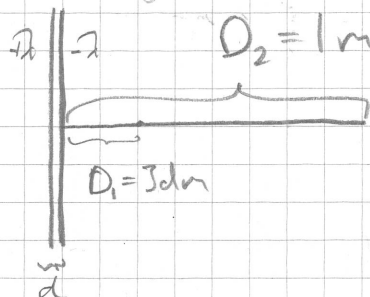
Elstängsel - F 2007-06-04

41

Givet:



Sökt: $\frac{E_1}{E_2}$



Trådbaddning:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad [N/C = V/m] \quad (2.3)$$

$$E_+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \left\{ r = D+d \right\} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (D+d)}$$

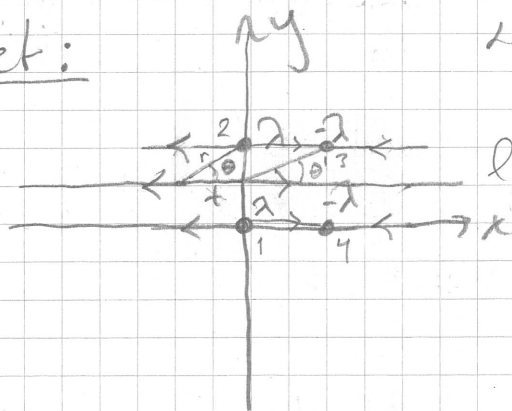
$$E_- = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 D}$$

$$\Rightarrow E_{\text{tot}} = E_+ + E_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (D+d)} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 D} = \frac{\lambda 2\pi\epsilon_0 D - \lambda 2\pi\epsilon_0 (D+d)}{(2\pi\epsilon_0)^2 (D+d) D}$$
$$= \frac{-\lambda d}{2\pi\epsilon_0 D^2}$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{-\lambda d}{2\pi\epsilon_0 D^2} \cdot \left(\frac{-2\pi\epsilon_0 D^2}{\lambda d} \right) = \frac{D_2^2}{D_1^2} = \left(\frac{1}{0.3} \right)^2 = 11$$

MT1 2002-08-23 - rötgasrening

2) Givet:



4 trådladdningar

Sätt: plotta fältet utefter linjen $\ell = (t, 0, 50, 0)$
varken linjen eller trådarna har något

Trådladdning: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$ z-beroende

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

Alla laddningarna är
symmetriskt längs ℓ
i y-riktningen

$$\Rightarrow \underline{E_y = 0}$$

$$r_1 = r_2 = \sqrt{t^2 + a^2}$$

$$r_3 = r_4 = \sqrt{(t-2a)^2 + a^2} = \sqrt{t^2 - 4ta + 5a^2}$$

Sätt: $a = 0,5 \text{ cm} = 0,005 \text{ m}$

$\vec{e}_r$ för trådladdning pekar bort (eller) mot tråden,

eftersom bara $E_x \neq 0$ måste vi ta x-komponenten

$$\text{av } E_x^+ = |\vec{E}| \cdot \cos\theta = |\vec{E}| \cdot \frac{t}{r} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2}}$$

$$\Rightarrow E_+ = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2| = \frac{2 \cdot 200110}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{t^2 + a^2}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2}} = \frac{2t}{\pi\epsilon_0 (t^2 + a^2)}$$

$$\text{p.s.s för } E_x^- = |\vec{E}| \cdot \cos(\theta') = |\vec{E}| \cdot \frac{(t-2a)}{\sqrt{(t-2a)^2 + a^2}} = |\vec{E}| \cdot \frac{(t-2a)}{\sqrt{t^2 - 4ta + 5a^2}}$$

$$\Rightarrow E_- = |\vec{E}_3 + \vec{E}_4| = -\frac{2\lambda}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{t^2 - 4ta + 5a^2}} \cdot \frac{(t-2a)}{\sqrt{t^2 - 4ta + 5a^2}} =$$

$$= \frac{\lambda(2a-t)}{\pi\epsilon_0 (t^2 - 4ta + 5a^2)}$$

$$\vec{E}_{\text{tot}} = (E_{\text{tot}}, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\lambda t}{\pi \epsilon_0 (t^2 + a^2)} + \frac{\lambda(2a - t)}{\pi \epsilon_0 (t^2 - 4at + 5a^2)}$$

$$= \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \frac{t(t^2 - 4at + 5a^2) + (2a - t)(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)(t^2 - 4at + 5a^2)} =$$

$$= \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \frac{t^3 - 4at^2 + 5a^2t + 2at^2 - t^3 + 2a^3 - ta^2}{(t^2 + a^2)(t^2 - 4at + 5a^2)} =$$

$$= \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \frac{4a^2t - 2at^2 + 2a^3}{(t^2 + a^2)(t^2 - 4at + 5a^2)}$$

$$-2a(t^2 - 2at - a^2)$$

$$1 - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}}$$

$$(t+a)(t-a)$$

pg - fermeln, BETA p. 64

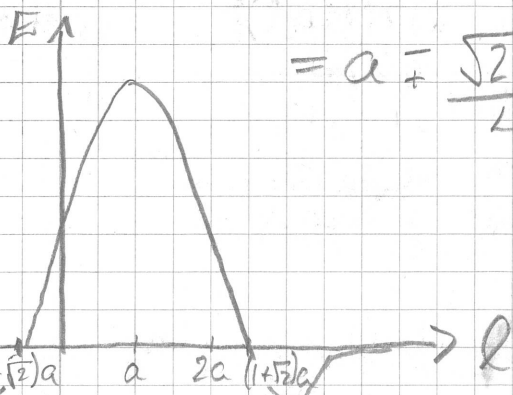
$$x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hitta rötter till $\frac{-2at^2 + 4a^2t + 2a^3}{a}$

$$\Rightarrow t = \frac{-4a^2 \pm \sqrt{16a^4 + 8a \cdot 2a^3}}{-4a} = a \pm \frac{\sqrt{2 \cdot 16a^4}}{-4a} =$$

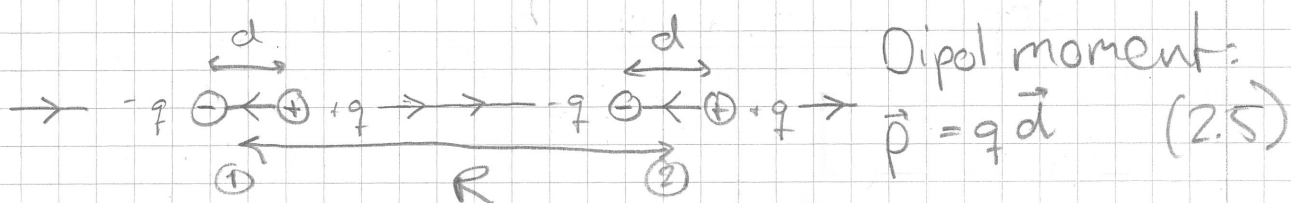
$$= a \pm \frac{\sqrt{2} \cdot 4a^2}{4a} = a \pm \sqrt{2}a$$



Dipolattraktion - FCL 2009-06-04

B1/ Givet: fritt roterande dipoler som inte kan förflytta sina laddningspunkter

Sökt: kraften mellan de två dipolerna som funktion av avståndet R



Elektrisk kraft på laddning ges av:

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (2.7)$$

E-fält för punkt laddning:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.2)$$

Summera bidrag i $R + \frac{d}{2}$ och $R - \frac{d}{2}$ för $+q$ och $-q$:
punktladdnings-

$$\begin{aligned} E_+ &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 (R-d)^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{q(R-d)^2 - qR^2}{4\pi\epsilon_0 (R-d)^2 R^2} = \\ \text{vid } +\frac{d}{2} &= \frac{q(R^2 - 2Rd + d^2 - R^2)}{4\pi\epsilon_0 (R-d)^2 R^2} = \frac{q(d^2 - 2Rd)}{4\pi\epsilon_0 (R-d)^2 R^2} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_- &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R+d)^2} = \frac{qR^2 - q(R+d)^2}{4\pi\epsilon_0 R^2 (R+d)^2} = \\ \text{vid } -\frac{d}{2} &= \frac{q(R^2 - R^2 - 2Rd - d^2)}{4\pi\epsilon_0 R^2 (R+d)^2} = \frac{-q(d^2 + 2Rd)}{4\pi\epsilon_0 R^2 (R+d)^2} \quad (2) \end{aligned}$$

Räkna ut kraften på ① från ② rika
(1), (2) och (2.2):

$$F = qE_+ - qE_- = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{d^2 - 2Rd}{(R-d)^2 R^2} + \frac{d^2 + 2Rd}{(R+d)^2 R^2} \right] =$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(R+d)^2(d^2 - 2Rd) + (R-d)^2(d^2 + 2Rd)}{(R-d)^2(R+d)^2 R^2} \right] =$$

$$T = (R^2 + 2Rd + d^2)(d^2 - 2Rd) + (R^2 - 2Rd + d^2)(d^2 + 2Rd) =$$

$$= R^2 d^2 - \cancel{2R^3 d} + \cancel{2Rd^3} - 4R^2 d^2 - \cancel{2Rd^3} + d^4 +$$

$$+ R^2 d^2 + \cancel{2R^3 d} - \cancel{2Rd^3} - 4R^2 d^2 + \cancel{2Rd^3} + d^4 =$$

$$= 2R^2 d^2 - 8R^2 d^2 + 2d^4 = 2d^4 - 6R^2 d^2 =$$

$$= 2d^2(d^2 - 3R^2) \approx \{R \gg d\} \approx -6d^2 R^2$$

$$\left((d+R)(d-R) = d^2 - R^2 \right)$$

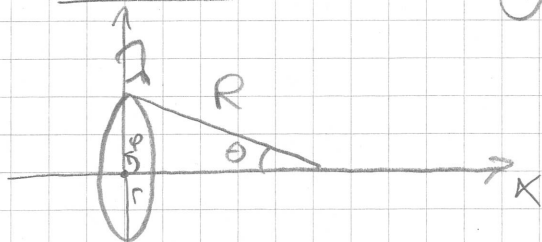
$$\Rightarrow F = \frac{-q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{3d^2}{(R-d)^2(R+d)^2} = \left\{ \rho = qd \right\} = \frac{-3\rho^2}{2\pi\epsilon_0(R-d)^2(R+d)^2} \approx$$

$$\approx \left\{ \begin{array}{l} R+d \approx R \\ R-d \approx R \end{array} \right\} \approx \underline{\underline{-\frac{3}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho^2}{R^4}}}$$

-2 annorlunda
från facit,
varför?

Ringladdning - TMI 2008-03-10

B3 Givet: Likförmigt laddad ring



Symmetri i y-riktning gör att E pekar i x-riktningen
 $\therefore$ behöver bara analysera x -komp E_x

Sökt: var utmed x blir E störst?
 uttryck $R(x, r) = \sqrt{x^2 + r^2}$

Punktladdning: $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ (2.2)

1 var ring ger detta att dE från ett element ds motsvarar:

$$dE = \frac{\lambda ds}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda ds}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)}$$

dE pekar i R-riktningen

Ta x-komponenten av dE :

$$dE_x = dE \frac{x}{R} = \frac{\lambda x ds}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}} \quad (1)$$

Integrera längs ringen:

$$E_x = \int dE_x = \int \frac{\lambda x ds}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}} = \left\{ ds = r d\varphi \right\}_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} = \int \frac{\lambda x r d\varphi}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\lambda x r}{2\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}} \quad (2), \text{ Derivera } E_x \text{ för att hitta max:}$$

$$\frac{dE_x}{dx} = \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f'g - fg'}{g^2} \right\} = \frac{\lambda r}{2\epsilon_0} \left[\frac{r \cdot (x^2 + r^2)^{3/2} - x r \cdot \frac{3}{2} (x^2 + r^2)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2 + r^2)^3} \right]$$

$$\frac{dE_x}{dx} = 0 \Rightarrow r(x^2 + r^2)^{3/2} - 3x^2 r (x^2 + r^2)^{1/2} =$$

$$= \underbrace{(x^2 + r^2)^{1/2}}_{> 0 \text{ om inte } x=r=0} [r(x^2 + r^2) - 3x^2 r] = 0$$

$$\Rightarrow r(x^2 + r^2) - 3x^2 r = x^2 + r^2 - 3x^2 = r^2 - 2x^2 = 0$$

$$2x^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = \pm \frac{r}{\sqrt{2}}}}$$

max/min
Symmetrisk kring
 $x=0$

skillnad mellan max och min är endast
riktningen på E_x (pos eller neg. riktning)

sätt in eller plotta för att kolla
max/min