Institutionen för matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Måndagen den 5 juni 2017

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. En kulles höjd ges av $z = 60 - 0{,}02x^2 - 0{,}01y^2$ där enheten är meter på alla tre koordinataxlar.
   (a) I vilken riktning i xy-planet ska vi röra oss för att komma ner snabbast om vi befinner oss i punkten $(50, 100, -90)$? **(2 p)**
   (b) Hur snabbt ändras höjden i punkten $(50, 100, -90)$ om vi rör oss i riktningen enligt del (a) med farten 1 km/h sett uppifrån? **(2 p)**

2. Bevisa formeln $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$ för volymen av ett klot med radie a genom att införa sfäriska koordinater i trippelintegralen
$$V = \iiint_K dV,$$
där klotet K ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$. **(4 p)**

3. Avgör vilket av fälten
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(x(z-1), -yz, z - x^2\big)$$
och
$$\mathbf{G}(x, y, z) = \big(y^2 + (2x - y)z, x(2y - z), x(x - y)\big)$$
som är konservativt och bestäm en potential till detta. **(4 p)**

DEL B

4. Den elliptiska cylindern $9x^2 + 25y^2 = 225$ och planet $4y + 3z = 0$ skär varandra i en kurva $\mathcal{C}$.
   (a) Ge en parametrisering av kurvan $\mathcal{C}$. **(2 p)**
   (b) Beräkna längden av kurvan $\mathcal{C}$. **(2 p)**

5. Låt $f(x, y) = x^2 + 2xy - 5y^2$ och $g(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$.
   (a) Bestäm största och minsta värde för $f(x, y)$ givet att $g(x, y) = 10$ om dessa existerar. **(2 p)**
   (b) Bestäm största och minsta värde för $g(x, y)$ givet att $f(x, y) = 10$ om dessa existerar. **(2 p)**

6. En snöboll i formen av ett klot centrerad i origo och med radie a belyses av solen som befinner sig långt bort på den positiva y-axeln. Bestäm den instrålande effekten

$$-\iint_S (0, -I, 0) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS,$$

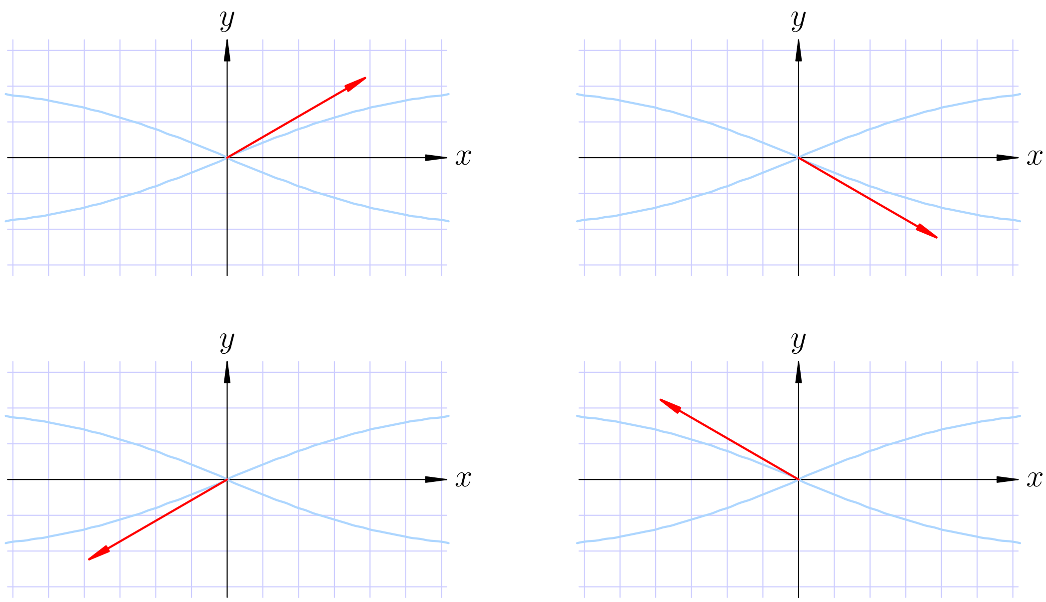
där S är den del av klotets yta som uppfyller $y > 0$ och därmed är belyst av solen, I är solens intensitet, $\hat{\boldsymbol{n}}$ är ytans utåtpekande normal och dS är arealementet. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Ett område som ligger på ena sidan om ett plant snitt genom en sfär kallas för en *sfärisk kalott*. Beräkna arean av den sfäriska kalott som ges av
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq h,$$
där a och h är konstanter med $0 < h < a$. **(4 p)**

8. I origo har kurvan $\cos(x + y) + \cos(x - y) + 4y^2 = 2$ en förgreningspunkt och består av fyra kurvstycken som möts där. Bestäm riktningsvektorn för respektive kurvstycke i origo.



Kurvan $\cos(x + y) + \cos(x - y) + 4y^2 = 2$ och de sökta riktningsvektorerna.

(4 p)

9. Låt kurvan $\mathcal{C}$ vara triangeln med hörn i punkterna $(3, 4)$, $(-4, 0)$, $(2, -3)$, och orienterad moturs. Beräkna
$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}.$$
(4 p)