KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
torsdag, 8 juni 2017

Skrivtid: 08:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst tre poäng.

DEL A

1. Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x+2y \\ x+y+2z \\ 4x+3y+2z \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm standardmatrisen till avbildningen T. **(1 p)**
(b) Bestäm en bas för nollrummet till T. **(3 p)**
(c) Bestäm dimensionen av bildrummet till T. **(2 p)**

2. Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Hitta alla egenvärden och motsvarande egenvektorer till A. **(3 p)**
(b) Bestäm en matris U och en diagonal matris D sådant att $A = UDU^{-1}$. **(1 p)**
(c) Beräkna $A^{123}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(2 p)**

Var god vänd!

DEL B

3. Betrakta två linjer i $\mathbb{R}^3$: L_1 som ges av $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}$ och L_2 som går genom punkterna $(-1,-1,2)$ och $(1,b,1)$, där b är ett konstant tal.

(a) Bestäm alla värden på b sådana att L_1 och L_2 skär varandra. **(3 p)**

(b) Bestäm en ekvation av planet som innehåller L_1 och L_2 för $b = 1$. **(3 p)**

4. Den kvadratiska formen Q ges av $Q\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = x^2 - xy + y^2$.

(a) Ange den symmetriska matris som tillhör Q. **(1 p)**

(b) Låt $\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$. Ange den matris som tillhör Q i bas $\mathcal{B}$. **(3 p)**

(c) Avgör karaktären av Q: positivt/negativt (semi)definit eller indefinit? **(2 p)**

DEL C

5. Låt $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en godtycklig, men inte specifierad linjär avbildning.

(a) Varför är dimensionen av bildrummet $\mathrm{Im}(L)$ av L högst 2? **(1 p)**

(b) Låt $\vec{b}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^3$ som ligger utanför bildrummet $\mathrm{Im}(L)$. Beskriv hur man bestämmer de vektorer $\vec{x}$ som minimerar $\|L(\vec{x}) - \vec{b}\|$. **(2 p)**

(c) Tillämpa b) för att hitta minsta värdet av $\|L(\vec{x}) - \vec{b}\|$, då $L(\vec{x}) = (x_1, -x_2, x_1 + x_2)$, och $\vec{b} = (1, 2, 3)$. **(3 p)**

6. Låt A vara en symmetrisk $n \times n$-matris.

(a) Bevisa att kolonnerna av A är ortonormala om och endast om A uppfyller ekvation $A^2 = I$. (Med I menas identitetsmatrisen). **(2 p)**

(b) Bevisa att om $A^{1246} = I$, så är $A^2 = I$. **(4 p)**